ИЮНЬ

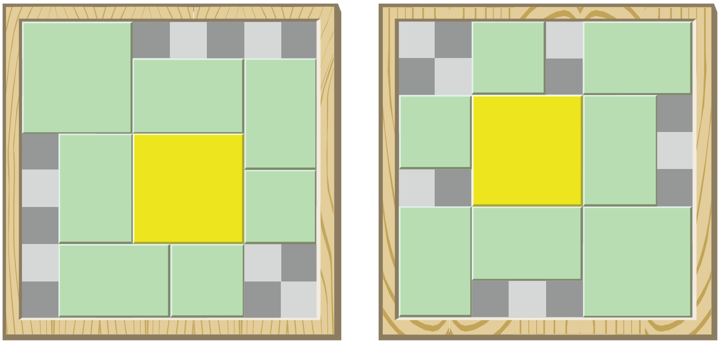
ISSN 0130-2221

2018 · № 6

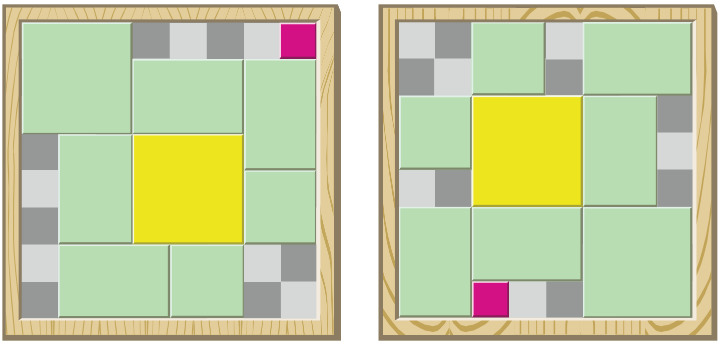
КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Кто разбудил летучую мышь?



1



2

В «Кванте» №4 за 2003 год рассказывалось о головоломке Сергея Грабарчука «Разбудите летучую мышь». Она состоит из игрового поля 8×8 и 8 брусочков, начальное расположение которых напоминает спящую летучую мышь (рис.1, слева). Передвигая брусочки, нужно добиться того, чтобы они располагались так, как показано справа на рисунке 1. Эта конфигурация похожа на летучую мышь в полете – отсюда и название головоломки. Сейчас известно, что лучшее решение этой головоломки состоит из 32 ходов.

На игровом поле много свободных полей, что позволяет усложнить головоломку. Добавим еще один брусочек размером 1×1 – он будет символизировать блоху, которая разбудила спящую летучую мышь (рис.2, слева). Требуемое конечное положение брусочков показано справа на рисунке 2. Для этой новой головоломки с блохой в лучшем известном решении 36 ходов. Получится ли у вас его найти?

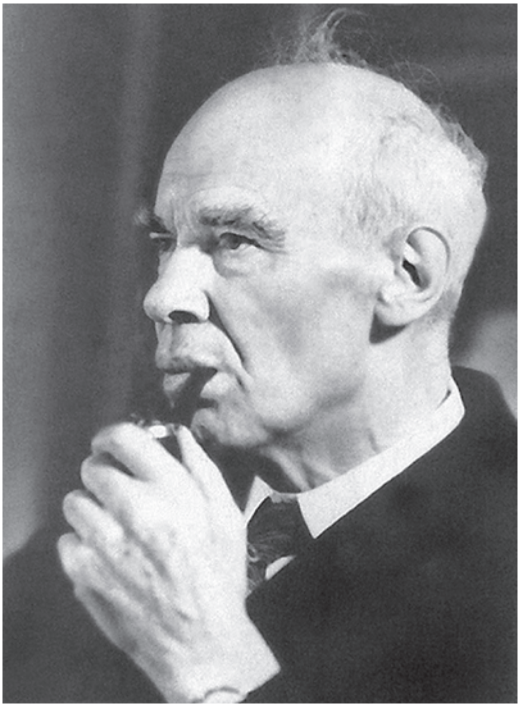
А сможете ли вы посадить на летучую мышь еще одну блоху, так, чтобы головоломка осталась разрешимой?

В.Журавлев

КВАНТ ИЮНЬ 2018 №6

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:



28 марта исполнилось 110 лет со дня рождения выдающегося физика-экспериментатора нашей страны – академика Исаака Константиновича Кикоина.

Исаак Константинович очень много сделал в физике. Он был автором первоклассных научных работ в физике твердого тела, атомной и ядерной физике, ядерной технике. Его работы по изучению электрических и магнитных свойств металлов, полупроводников и ферромагнетиков, гальваномагнитных, фотоэлектрических и фотомагнитных явлений, открытие фотомагнитоэлектрического эффекта безусловно вошли в золотой фонд физических экспериментов, послужили основой для создания новых приборов и развития теоретических представлений об исследуемых явлениях.

Волею судеб, И.К.Кикоин стал одним из ближайших соратников И.В.Курчатова – главы советского атомного проекта. Был создателем и научным руководителем промышленности по разделению изотопов – важнейшей части всей атомной программы страны.

При всей своей занятости и постоянной перегрузке делами научными и оборонными Исаак Константинович читает лекции по общей физике в Московском университете, пишет учебники для студентов и школьников. Он – один из инициаторов создания в стране специализированных физико-математических школ-интернатов, научно-популярного физико-математического журнала для школьников «Квант» и книжной серии «Библиотечка «Квант», активный участник организации и проведения Всесоюзной физико-математической олимпиады. Олимпиаду, «Квант» и «Библиотечку» Исаак Константинович возглавлял до конца своей жизни.

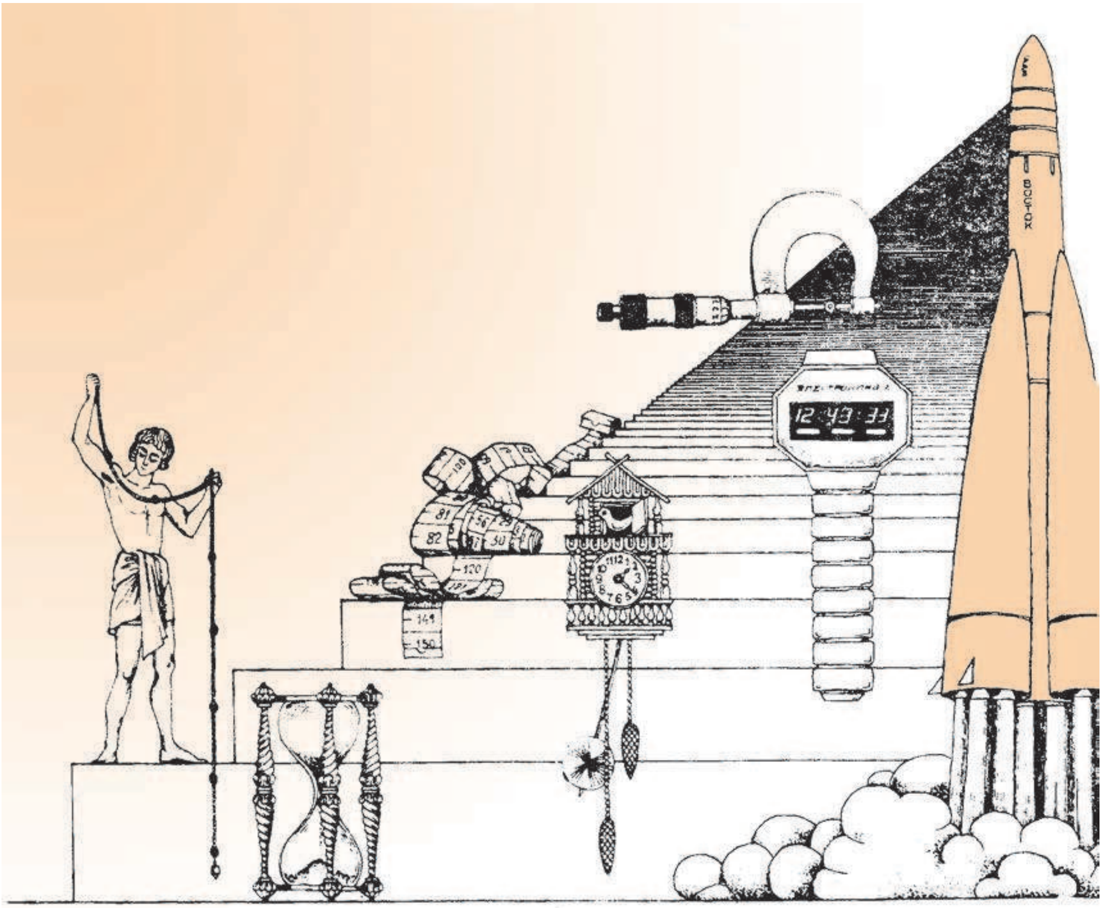
Предлагаем вниманию читателей одну из статей И.К.Кикоина, написанных для «Кванта», и стихотворение, взятое из специального номера журнала, выпущенного в единственном экземпляре к 75-летию Исаака Константиновича.

Как вводятся физические величины

И.КИКОИН

Физика отличается от других естественных наук тем, что объективные закономерности, устанавливаемые при изучении физических явлений природы, выражаются количественно (математически). Для этого физики вводят величины, характеризующие изучаемое явление или процесс. Экспериментально устанавливаются математические соотношения между величинами в виде соответствующих уравнений или формул, которые называются физическими законами природы.

Как же вводятся физические величины? Для каждой физической величины должен быть указан способ ее измерения. Точнее, нельзя вводить физическую величину, не указав, по крайней мере, принципиальный способ ее измерения. Поясним это некоторыми примерами. Начнем с величин, используемых в механике.



1. Скорость

Понятие скорости введено с незапамятных времен. И можно себе представить, как это было сделано. Возможно, какой-то человек, располагающий прибором для измерения времени – это могли быть, например, солнечные часы, наблюдал за движением караванов в пустыне. Он определил, какой путь проходит караван за определенный промежуток времени. Может быть, он сделал это, сосчитав число шагов верблюда. Шаг верблюда – это мера измерения длины. Сопоставив числа,

выражающие промежуток времени и пройденный путь, он установил любопытное соотношение между ними. Оказалось, что отношение путей, пройденных караваном за любые промежутки времени, равно отношению этих промежутков времени. На современном языке это означает следующее: если обозначить путь, пройденный караваном за промежуток времени t_1, через s_1, а путь, пройденный караваном за промежуток времени t_2, через s_2, то $\frac{s_1}{s_2} = \frac{t_1}{t_2}$. Очень любопытный факт! Наблюдатель, вероятно, рассказал об этом многим из своих знакомых, и, возможно, нашелся человек, который сообразил, что указанное соотношение особого смысла не имеет, потому что оба отношения, и справа и слева, – числа отвлеченные, и ничего нет удивительного в том, что 2 = 2 или 3 = 3 и т.д. Он предложил переписать это соотношение в виде

$$\frac{s_1}{t_1} = \frac{s_2}{t_2}$$

и назвал эти отношения скоростью передвижения каравана. Эта величина оказалась полезной, потому что с ее помощью можно предсказать, на каком расстоянии от начального пункта движения окажется караван через любой промежуток времени. Действительно, обозначив $\frac{s}{t} = v$, сразу можно найти, что $s = vt$.

Таким образом была введена величина, которая называется скоростью. Не следует думать, что уравнение $s = vt$ есть некий закон природы. Это уравнение следует из *определения* того, что такое скорость. Можно было бы с таким же успехом назвать скоростью, например, отношение $\frac{s^2}{t^2} = u$. И тогда тоже можно было бы определить величину s из уравнения $s = t\sqrt{u}$. Но условились, *именно условились*, называть скоростью отношение $\frac{s}{t}$.

2. Ускорение

Бывают и такие движения, при которых отношение пройденных путей за любые промежутки времени равно отношению квадратов этих промежутков времени. На современном языке это записывается следующим равенством:

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{t_1^2}{t_2^2}, \qquad (1)$$

где s_1 и s_2 – расстояния, пройденные движущимся телом за промежутки времени t_1 и t_2 соответственно. Таково, например, движение тел, свободно падающих в вакууме, или движение тел вниз по наклонной плоскости без трения.

Такие движения изучал знаменитый итальянский физик Галилей. Он записал уравнение (1) в виде $\frac{2s_1}{t_1^2} = \frac{2s_2}{t_2^2}$ и назвал эти отношения и вообще отношение $\frac{2s}{t^2}$ *ускорением* движущегося тела (материальной точки).[1] Понятие ускорения связано, очевидно, с тем, что сама скорость движущегося тела может меняться со временем.

[1] Коэффициент 2 вводится из чисто математических соображений.

Если скорость пропорциональна времени, т.е. $v = v_0 + at$, то $a = \dfrac{v - v_0}{t}$, где $(v - v_0)$ – изменение скорости за промежуток времени t.

Таким образом была введена новая физическая величина – ускорение. Известная формула $s = \dfrac{at^2}{2}$ (предполагается, что начальная скорость тела равна нулю) также не выражает никакого закона природы, а есть следствие принятого определения ускорения.

В дальнейшем было введено уточнение: для правильного описания различного рода движений необходимо принять во внимание, что перемещение s, скорость v и ускорение a – величины векторные.

3. Масса

Из ряда опытов, проведенных в самых разных условиях, можно сделать вывод, что тело, бесконечно удаленное от всех других тел, не может двигаться с ускорением, если рассматривать движение относительно некоторых вполне определенных систем отсчета, которые называются инерциальными системами отсчета. Такое тело находится либо в состоянии покоя, либо движется равномерно и прямолинейно относительно инерциальной системы отсчета. Если же тело движется с ускорением, то всегда можно указать другое тело или другие тела, влияние которых вызывает ускоренное движение данного тела. В таких случаях говорят, что тела взаимодействуют друг с другом.

Рассмотрим простейший случай – когда взаимодействуют два тела. Опыт показывает, что в этом случае оба тела получают ускорения, направления которых взаимно противоположны. Что касается модулей ускорений обоих тел, то они могут быть различны, но отношение модулей ускорений обоих тел остается постоянным независимо от того, в каких условиях происходит взаимодействие. Так, оно не зависит от взаимного расположения этих тел в пространстве, не зависит от времени, не зависит от скоростей обоих тел, не зависит от окружающей среды и так далее. Это отношение зависит только от свойств самих взаимодействующих тел.

В физике изучают только такие свойства тел, которые могут быть выражены числами, и для изучения тех или иных свойств в физике вводятся физические величины, характеризующие эти свойства. Когда речь идет об ускорении тела, вызванном влиянием на него другого тела, то это ускорение может быть большим или меньшим. Чем больше ускорение тела, тем, очевидно, больше изменение его скорости за данный промежуток времени. И наоборот, если ускорение тела мало, то это значит, что за тот же промежуток времени его скорость изменяется мало. Скорость не может меняться мгновенно – для всякого изменения скорости тела требуется некоторый промежуток времени.

Ускорения двух взаимодействующих тел вызваны их взаимодействием. Очевидно, что промежуток времени, в течение которого изменяются скорости двух взаимодействующих друг с другом тел, один и тот же для обоих тел – это время их взаимодействия. Ясно, что тому телу, у которого ускорение меньше, следует приписать большую *инертность* – его движение более похоже на движение по инерции. Ведь если бы ускорение тела равнялось нулю, то это означало бы, что тело движется по инерции (с постоянной по величине и направлению скоростью). А это противоречило бы предположению о взаимодействии тел. Из двух взаимодействующих тел более инертно то тело, у которого ускорение меньше, и наоборот. Следовательно, инертность есть свойство тел, которое нужно характеризо-

вать некоторой величиной. Такой величиной служит масса тела.

Свойства тел, от которых зависит отношение их ускорений при взаимодействии друг с другом, мы назовем *массами* этих тел. Массу тела принято обозначать буквой m. Итак, мы ввели новую величину – массу. Но мы еще не указали способа измерения массы тела. Попытаемся это сделать.

Припишем одному из двух тел массу m_1, другому – массу m_2, а ускорения этих тел при взаимодействии обозначим через $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Мы знаем из опыта, что отношение модулей ускорений всегда постоянно. Условимся, что отношение $\frac{a_2}{a_1}$ равно отношению $\frac{m_1}{m_2}$, т.е.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}. \qquad (2)$$

Это означает, что тело большей массы получает меньшее ускорение и наоборот. Ускорения измерять мы умеем, поэтому можно определить из (2) отношение масс обоих тел. Именно *отношение* масс! Но как найти значение массы каждого из тел? Вспомним, как поступают при измерении любой физической величины. Как, например, измеряется длина тела? Для этого, как известно, выбирается эталон, длина которого принимается за единицу (в СИ – 1 метр). Тогда число, выражающее длину любого тела, определяется отношением этой длины к длине эталона. Так же мы поступим и в случае измерения массы. Выберем тело, которое будет служить эталоном, т.е. масса которого будет принята за единицу (в СИ – 1 килограмм). Обозначим массу эталона $m_э$. Теперь уже нетрудно определить массу m любого тела. Для этого нужно привести это тело во взаимодействие с эталоном и измерить ускорения обоих тел.

Обозначим ускорение эталона через $a_э$, ускорение тела, масса которого измеряется, через a. Тогда в соответствии с формулой (2) пишем $\frac{m}{m_э} = \frac{a_э}{a}$. Отсюда

$$m = \frac{a_э}{a} m_э, \qquad (3)$$

т.е. *масса тела равна массе эталона, умноженной на отношение ускорения эталона к ускорению тела*.

Можно было бы, конечно, написать, что отношение масс двух тел равно квадрату обратного отношения их ускорений, корню квадратному из этого отношения или другой функции от этого отношения. Но оказалось целесообразным дать такое определение массы, которое отвечает соотношению (2). Причина этому следующая. Пользуясь соотношением (2), мы показали, как можно измерить массу любого тела, используя эталон массы. Тогда, измерив по формуле (3) массу нескольких тел, можно на опыте показать, что масса нескольких тел, сложенных вместе, равна сумме масс всех слагаемых тел. Если бы мы определили массу тела, например, так, что отношение масс равнялось бы квадрату обратного отношения их ускорений, то масса нескольких тел не равнялась бы сумме масс этих тел – как говорят, масса не обладала бы свойством аддитивности. Так что определение массы, отвечающее соотношению (2), вполне обосновано.

4. Сила

Выше было указано, что ускорение любого тела возникает при взаимодействии этого тела с другими телами. Таким образом, причиной ускорения, которое получает данное тело, служит влияние на него других тел. Нужно найти физическую величину, которая служила бы мерой этого влияния. Эту физическую величину назвали *силой*. Поэтому вместо того, чтобы говорить, что тело приобретает ускорение под влиянием других тел, говорят кратко – на тело действует сила. Как выразить силу числом? Ответ на этот вопрос дал великий английский физик Ньютон. Он сформулировал один из важнейших законов механики, который получил название второго закона Ньютона.

Если обозначить силу через $\vec{F}$, то второй закон Ньютона выражается уравнением

$$\vec{F} = m\vec{a}\,, \qquad (4)$$

где $\vec{a}$ – ускорение тела, а m – его масса. Не нужно думать, будто из уравнения (4) следует, что сила $\vec{F}$, действующая на тело, зависит от его массы или ускорения. Значение силы не зависит от свойств тела или от характера его движения. Оно определяется характером взаимодействия данного тела с другими телами.

К счастью, в природе имеется не так много различных типов взаимодействия. При изучении же законов механики мы сталкиваемся всего с двумя типами сил – это сила всемирного тяготения (гравитационная сила) и электростатическая сила.[2]

Сила всемирного тяготения определяется формулой

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

(закон всемирного тяготения Ньютона). В частности, в условиях Земли сила всемирного тяготения проявляется в виде силы тяжести, действующей на любое тело и направленной к центру Земли.

Электростатическая сила определяется формулой

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

(закон Кулона). В механике электрические силы, характеризующие взаимодействие между заряженными частицами, из которых состоят тела, проявляются в виде сил упругости и сил трения. Сила упругости возникает при деформации тела, т.е. при изменении взаимного расположения частей тела, например при растяжении или сжатии пружины. Сила трения возникает, как известно, при движении соприкасающихся тел относительно друг друга.

Таким образом, в механике обычно изучаются три вида сил: сила всемирного тяготения, сила упругости и сила трения. Если любая из этих сил, приложенная к телу массой m, вызывает его ускорение, равное $\vec{a}$, то значение этой силы всегда равно $m\vec{a}$. Другими словами, если телу массой m нужно сообщить ускорение, равное $\vec{a}$, то к этому телу нужно приложить силу, равную $\vec{F} = m\vec{a}$ (ясно, что направление прилагаемой силы $\vec{F}$ должно совпадать с направлением ускорения $\vec{a}$, которое нужно сообщить телу). При этом сила $\vec{F}$ может быть силой тяжести (силой всемирного тяготения), силой упругости, силой трения или, наконец, геометрической суммой этих сил. В этом и заключается смысл второго закона Ньютона.

[2] Существуют также магнитные силы, которые своим происхождением обязаны движению электрических зарядов. Однако обычно они малы по сравнению с электростатическими силами.

Попытаемся выяснить, что послужило основанием для формулировки второго закона Ньютона. Представим себе две материальные точки A и B, взаимодействующие друг с другом, т.е. сообщающие друг другу ускорения. Опыт показывает, что направления этих ускорений взаимно противоположны. Очевидно, обе взаимодействующие материальные точки «равноправны» в том смысле, что можно взаимно поменять их обозначения. Другими словами, ни одна из взаимодействующих точек не имеет никаких преимуществ перед другой. Отсюда следует, что должна существовать физическая величина, одинаковая для обеих взаимодействующих материальных точек. Нетрудно найти такую величину. Из соотношения (2) следует

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{a_B}{a_A},$$

где m_A и m_B – массы взаимодействующих материальных точек, a_A и a_B – модули их ускорений. Таким образом,

$$m_A a_A = m_B a_B . \qquad (5)$$

Вот мы и нашли величину, которая одинакова для обоих взаимодействующих тел. Эта величина характеризует взаимное влияние материальных точек друг на друга, вызывающее их ускорения. Существование такой величины и послужило основанием для формулировки второго закона Ньютона.

Учитывая, что ускорение – величина векторная, перепишем соотношение (5) в виде

$$m_A\vec{a}_A = -m_B\vec{a}_B .$$

Обозначив $m_A\vec{a}_A = \vec{F}_A$ и $m_B\vec{a}_B = \vec{F}_B$, получим

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B .$$

Векторные величины $\vec{F}_A$ и $\vec{F}_B$ Ньютон назвал *силами*. Как видно, *сила, с которой материальная точка A действует на материальную точку B, равна по модулю, но противоположна по направлению силе, с которой материальная точка B действует на материальную точку A.* Это утверждение выражает третий закон Ньютона. Иногда кратко этот закон формулируют так: действие равно противодействию.

Из всего сказанного о физической величине, называемой силой, следует, что единственный результат действия силы на тело – это приобретаемое телом ускорение.

5. Импульс

Мы уже знаем, что при взаимодействии двух тел оба тела получают ускорения, которые зависят от их масс. Но можно найти величину, которая будет одинакова для обоих взаимодействующих тел и не будет зависеть от масс этих тел.

Эту величину мы найдем, переписав второй закон Ньютона – $\vec{F} = m\vec{a}$ – в несколько измененном виде. Вспомним, что ускорение тела можно записать как $\vec{a} = \dfrac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}$. Тогда $\vec{F} = m\dfrac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}$, откуда

$$\vec{F}t = m\vec{v} - m\vec{v}_0 .$$

Величина $m\vec{v}$ получила название импульса тела, а величина $\vec{F}t$ – импульса силы.

Теперь мы можем сказать, что при взаимодействии двух тел изменяется импульс каждого из них. Но, в соответствии с третьим законом Ньютона, импульсы сил, с которыми тела действуют друг на друга, равны по модулю и направлены в противоположные стороны. Поэтому и изменения импульсов обоих тел также равны по модулю и взаимно противоположны по направлению. Значит, *геометрическая сумма импульсов взаимодействующих тел остается постоянной при любом взаимодействии этих тел*. Это утверждение называют законом сохранения импульса. Можно показать, что закон сохранения импульса справедлив не только для двух, но и для любого числа взаимодействующих друг с другом тел. Это – один из важнейших законов природы.

6. Работа и энергия

Импульс силы мы определили как произведение силы $\vec{F}$ на время ее действия t. По аналогии можно ввести величину, равную произведению силы, действующей на тело, на перемещение тела. Эту величину называют *работой* силы. В том случае, когда направления векторов силы $\vec{F}$ и перемещения $\vec{s}$ совпадают, работа силы равна Fs. В общем же случае, когда направление силы и направление перемещения тела составляют угол α друг с другом, выражение для работы имеет вид

$$A = Fs\cos\alpha .$$

В отличие от импульса тела, который есть величина векторная, работа – величина скалярная.

Можно доказать, что работа сил, действующих на тело, всегда равна

$$A = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} . \qquad (6)$$

Величину $\frac{mv^2}{2}$ называют *кинетической энергией* движущегося тела. Равенство (6) выражает так называемую теорему о кинетической энергии: *изменение кинетической энергии тела равно работе действующих на тело сил*. Напомним, что взаимодействие тел можно характеризовать не только силой, но и *потенциальной энергией*. Для потенциальной энергии справедлива следующая теорема: *изменение потенциальной энергии взаимодействующих тел, взятое с противоположным знаком, равно работе сил взаимодействия.*

Таким образом, мы ввели три важные физические величины – работу *сил*, кинетическую энергию *тела* и потенциальную энергию *взаимодействия* тел. Нетрудно показать, что для системы тел, взаимодействующих друг с другом силами тяготения и упругости, справедлив закон сохранения полной энергии: *сумма потенциальной и кинетической энергий взаимодействующих друг с другом тел остается неизменной.*

Закон сохранения энергии и закон сохранения импульса представляют собой наиболее общие законы природы.

* * *

Мы привели ряд примеров того, как вводятся физические величины. Из этих примеров видно, насколько важно правильно выбрать физические величины, характеризующие то или иное явление. Мы ограничились только величинами, характеризующими механическое движение. Рациональное введение физических величин позволило открыть и сформулировать ряд важных законов классической механики (ньютоновской механики). Эти законы нашли широчайшее применение во многих областях техники. По тем же принципам вводятся физические величины и в других разделах физики.

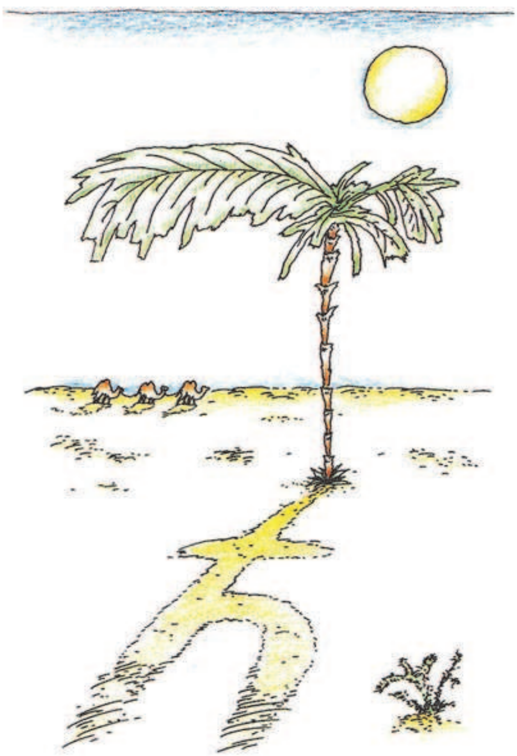
«Вот Квант, который построил Исаак...»

А.САВИН

Вот Квант, который построил Исаак,
А вот ученица,
Которая изредка любит хвалиться,
Что все понимает на целой странице
В Кванте, который построил Исаак.

Вот автор статьи – знаменитый ученый,
Который писал ее так увлеченно
Для этой без меры серьезной девицы,
Которая изредка любит хвалиться,
Что все понимает на целой странице
В Кванте, который построил Исаак.

А вот рецензент – давний член редсовета,
Который прочел сочинение это,
Представив себя симпатичной девицей,
Которая тщетно мурыжит страницу,
Пытаясь понять то, о чем говорится
В Кванте, который построил Исаак.



А это редактор, статью эту правивший,
Лишь автора имя на месте оставивший,
Чтоб даже тупейшая в мире девица
Смогла хоть единожды в год похвалиться,
Что все понимает на целой странице
В Кванте, который построил Исаак.

А это художник в глубокой прострации
Пытается выдумать те иллюстрации,
Которые так очаруют девицу,
Что сходу она прочитает страницу
В Кванте, который построил Исаак.

Вот главный редактор –
большой академик,
Он правит (за это не требуя денег),
Чтоб делалось все только так и вот так,
Поскольку он есть этот самый Исаак,
Который по уши влюбился в девицу,
Которая пальчиком тычет в страницу,
Пытаясь понять то, о чем говорится
В Кванте, который построил Исаак.

Выпуклый анализ на плоскости

Л.ЛОКУЦИЕВСКИЙ, В.ТИХОМИРОВ

Мы обсудили свойства выпуклых множеств, теперь расскажем о выпуклых функциях. Стоит сказать, что особое развитие теории выпуклости произошло именно благодаря анализу выпуклых функций.

С каждой функцией одного переменного $y = f(x)$, у которой допускаются значения, равные $+\infty$ (т.е. с областью определения $\mathbb{R}$), связано на плоскости с координатами $(x;y)$ множество $\operatorname{epi} f = \left\{(x;y) \in \mathbb{E}^2 \mid y \geq f(x)\right\}$, называемое *надграфиком* или *эпигра́фом* функции f. Функция, надграфик которой выпуклое множество, называется *выпуклой*, а функция надграфик которой замкнутое множество, называется *замкнутой* (рис.7). Функция $y = x^2$, а

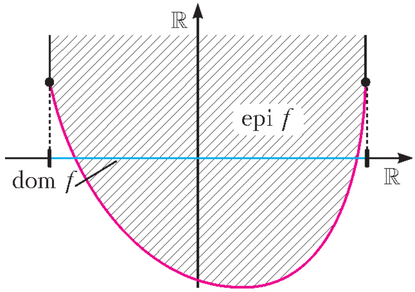


Рис. 7. Выпуклая замкнутая функция одного переменного

также функция, равная нулю, скажем, на отрезке $[0;1]$, а вне этого отрезка равная бесконечности, выпуклы и замкнуты, а функция $y = x^3$ замкнута, но выпуклой не является.

Символ $+\infty$ оказывается очень удобным при исследовании выпуклых функций. Правила работы с ним совершенно естественны: $+\infty \pm a = +\infty$ для любого конечного числа a, $+\infty \cdot a = +\infty$ для любого $a > 0$, а произведение $+\infty \cdot 0$ и разность $+\infty - \infty$ будем считать некорректными. Также $+\infty > a$ для любого конечного числа a. Множество тех x, где $f(x) \neq +\infty$, называемое *эффективным множеством* f, обозначается $\operatorname{dom} f$.

На самом деле, теория выпуклых множеств была создана Минковским не на плоскости, а в n-мерном пространстве, а теория выпуклых функций была построена Фенхелем и некоторыми другими математиками сороковых-пятидесятых годов прошлого века не для функций одного переменного, а для функций многих переменных. Эти исследования оказались очень актуальными. Еще перед Второй мировой войной обнаружилось, что планирование военных операций и экономика моделируются системами линейных неравенств, и в теории выпуклости выделился раздел, где такие неравенства исследовались. Основы теории выпуклых неравенств были заложены Леонидом Витальевичем Канторовичем (1912–1986) в 1939 году, а сам раздел получил название линейного программирования.

Мы уже знаем, что выпуклые замкнутые множества допускают двойственное описание. Каждую выпуклую замкнутую функцию тоже можно описать на двойственном языке. Такое описание для функций приводит к очень удобному аппарату выпуклого исчисления. Например, для каждой выпуклой замкнутой функции определена двойственная выпуклая функция, двойственная к которой совпадает с исходной функцией!

Но не будем забегать вперед. Сначала поймем, как алгебраически сформулировать результат теоремы Минковского, примененной к надграфику выпуклой функции. Напомним, что линейной функцией называется функция вида $y = ax + b$, где a и b – вещественные числа. Линейная функция является выпуклой, так как ее

Окончание. Начало – в предыдущем номере журнала.

надграфик – это полуплоскость. Ключевая идея, позволяющая превратить теорему Минковского в анализ выпуклых функций, заключается в том, что полуплоскости описываются линейными неравенствами. В результате получается очень мощный язык для работы с выпуклыми функциями.

Теорема 4 (теорема Фенхеля о двойственном описании выпуклых функций). *Выпуклая замкнутая функция одного переменного является верхней гранью линейных функций, ее не превосходящих.*

Доказательство. Пусть задана выпуклая замкнутая функция $y = f(x)$. Если эффективное множество этой функции пусто, $\operatorname{dom} f = \varnothing$, то утверждение теоремы очевидно выполнено. Поэтому будем считать, что $\operatorname{dom} f \neq \varnothing$. Докажем, что в этом случае для любой точки $(x_0; y_0)$ не из $\operatorname{epi} f$ найдется такая линейная функция, что, с одной стороны, ее график лежит ниже надграфика $\operatorname{epi} f$, а с другой стороны – над точкой $(x_0; y_0)$. Существование такой линейной функции для каждой точки $(x_0; y_0)$, не лежащей в надграфике функции, совпадает с утверждением теоремы.

Итак, выберем любую точку $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$. Точка $(\bar{x}; f(\bar{x}) - 1)$ на плоскости не принадлежит $\operatorname{epi} f$ и по теореме отделимости (теорема 1) может быть строго отделена от $\operatorname{epi} f$ прямой l_1, которая не может быть вертикальной прямой, имеющей координату $\bar{x}$ (такая прямая точку $(\bar{x}; f(\bar{x}) - 1)$ строго не отделяет). Значит, эта прямая – график линейной функции (рис.8).

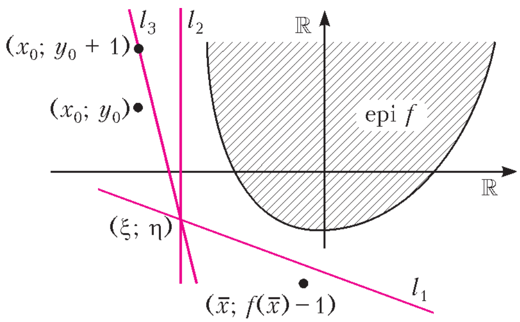


Рис. 8. Иллюстрация к доказательству теоремы Фенхеля

Поскольку точка $(x_0; y_0)$ не принадлежит $\operatorname{epi} f$, то по теореме 1 она может быть строго отделена от $\operatorname{epi} f$ прямой l_2. Если эта прямая – график линейной функции, то все в порядке. Но допустим, что прямая l_2 вертикальна, т.е. имеет уравнение $x = \xi$. В этом случае надграфик $\operatorname{epi} f$ лежит либо слева, либо справа от l_2. Поскольку эти случаи аналогичны, будем для определенности считать, что $\xi > x_0$, т.е. надграфик $\operatorname{epi} f$ лежит справа от прямой l_2. Так как прямая l_1 не вертикальна, а l_2 вертикальна, они обязательно пересекаются. Обозначим через $(\xi; \eta)$ координаты точки пересечения. Проведем прямую l_3 через точки $(\xi; \eta)$ и $(x_0; y_0 + 1)$. По построению, прямая l_3 строго отделяет $\operatorname{epi} f$ от точки $(x_0; y_0)$ и не является вертикальной. Таким образом, мы доказали, что для любой точки, не принадлежащей $\operatorname{epi} f$, существует линейная функция, отделяющая эту точку от надграфика заданной функции. А это и требовалось доказать.

Теперь мы готовы для формулировки выпуклой двойственности для выпуклых функций. Двойственным объектом для выпуклой функции $f(x)$ является *сопряженная функция* $f^*(p)$, являющаяся по определению максимумом, а точнее супремумом, выражения $px - f(x)$ по всем x:

$$f^*(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(px - f(x) \right).$$

Также иногда сопряженную функцию $f^*(p)$ называют *преобразованием Юнга–Фенхеля* (или Лежандра–Юнга–Фенхеля) функции $f(x)$ либо *первой сопряженной* к f функцией. *Второй сопряженной* к f функцией называют функцию, сопряженную к сопряженной:

$$f^{**}(x) = \sup_{p \in \mathbb{R}} \left(px - f^*(p) \right).$$

Теорема 5 (теорема Фенхеля–Моро). *Пусть f – выпуклая и замкнутая функция одного переменного. Тогда $f = f^{**}$.*

Доказательство. Эта теорема является несложным следствием теоремы Фенхеля. Точка $(p; q)$ лежит в надграфике f^*, если $q \geq f^*(p)$, т.е. $q \geq px - f(x)$ при всех x. Меняя в этом неравенстве q и $f(x)$ местами, получаем, что $f(x) \geq px - q$ при всех x. Итак, точка $(p;q)$ лежит в $\operatorname{epi} f^*$, если график линейной функции $y = px - q$ лежит под $\operatorname{epi} f$.

Изучим теперь надграфик второй сопряженной функции f^{**}. Точка $(x_0;y_0)$ лежит в $\operatorname{epi} f^{**}$, если $y_0 \geq f^{**}(x_0)$, т.е. $y_0 \geq px_0 - f^*(p)$ при всех p. Поэтому если $q \geq f^*(p)$, то заведомо $y_0 \geq px_0 - q$. Итак, мы получили, что точка $(x_0;y_0)$ лежит в $\operatorname{epi} f^{**}$, если она лежит над графиками всех прямых $y = px - q$ для всех $(p;q)$ из $\operatorname{epi} f^*$. Другими словами, f^{**} – это верхняя грань линейных функций, не превосходящих f. Поэтому по теореме Фенхеля $f = f^{**}$.

Верно, конечно, и утверждение, обратное к теореме Фенхеля–Моро: если $f = f^{**}$, то функция f является выпуклой и замкнутой. Доказательство мы не приводим, так как оно почти ничем не отличается от аналогичной части в доказательстве теоремы о биполяре.

Рассмотрим одно простое, но очень важное применение сопряженных функций. Очевидно из определения, что для всех x и p выполняется неравенство

$$f(x) + f^*(p) \geq px,$$

называемое неравенством Юнга.

Задача 2. Выберем любые четыре положительных числа x, p, a и b. Докажите, что если $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, то

$$\frac{x^a}{a} + \frac{p^b}{b} \geq px$$

(при $a = b = 2$ это всем известное неравенство $x^2 + p^2 \geq 2px$).

Разберемся, при каких x и p в неравенстве Юнга возможно равенство.

Задача 3. Предположим, так оказалось, что выпуклые функции f и f^* дифференцируемы. Докажите, что

$$f(x) + f^*(p) = px \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow p = f'(x) \Leftrightarrow x = f^{*\prime}(p).$$

Выпуклый анализ очень хорошо работает в задачах оптимизации. Рассмотрим одно из применений идеи отделимости при отыскании минимума функции. Пусть, например, $f(x)$ – дифференцируемая выпуклая функция одного переменного и требуется найти ее минимум на отрезке $[a;b]$. График выпуклой функции всегда лежит над касательной. Поэтому если $f'(c) > 0$ в некоторой точке $c \in [a;b]$, то минимум не может лежать на отрезке $[c;b]$ и должен лежать на отрезке $[a;c]$. Если $f'(c) < 0$, то, аналогично, минимум находится на отрезке $[c;b]$. Если же $f'(c) = 0$, то c – минимум.

Для того чтобы найти минимум, можно попробовать решить уравнение $f'(x) = 0$, однако явно решить такое уравнение получится далеко не всегда. Тем не менее, приближенно найти минимум выпуклой функции очень просто. Пусть c – середина отрезка $[a;b]$. Если $f'(c) = 0$, то c – минимум и задача решена. Если же $f'(c) \neq 0$ (что скорее всего), то в зависимости от знака $f'(c)$ обозначим через $[a_1;b_1]$ ту половину отрезка, на которой находится минимум, а про вторую, на которой минимума заведомо нет, забудем. Далее, обозначим через c_1 середину получившегося отрезка $[a_1;b_1]$ и повторим: вычисление $f'(c_1)$ позволит уменьшить отрезок еще в два раза. Таким образом, мы получим геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{2}$ и за n шагов найдем отрезок длины $(b-a)/2^n$, на котором лежит минимум, или, другими словами, найдем минимум с точностью до $(b-a)/2^n$.

На первый взгляд, описанный выше метод «отсечения» будет работать только на прямой, так как опирается на деление отрезка пополам. Однако это не так! Он прекрасно работает и в многомерном случае: если требуется приближенно найти минимум выпуклой функции многих переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на выпуклом ограниченном множестве $\mathscr{C} \subset \mathbb{E}^n$, то, вычислив производную f в какой-нибудь точке множества $\mathscr{C}$, можно провести через эту точку гиперплоскость (ортогональную f') и отсечь полупространство, в котором минимума заведомо нет. Если при этом в качестве точки выбрать центр масс $\mathscr{C}$, то по (очень красивой) теореме Грюнбаума–Хаммера (см. [3]) объем отсеченной части будет составлять не меньше

$\frac{1}{e}$ от объема всего множества $\mathscr{C}$. Поэтому, действуя по индукции, мы получим геометрическую прогрессию со знаменателем $\left(1-\frac{1}{e}\right)$. Данный алгоритм носит название «метод центрированных сечений» и имеет сейчас очень широкое применение в компьютерных вычислениях. Отметим, что задача нахождения центра масс многомерного выпуклого тела все же сложнее задачи отыскания середины отрезка и требует отдельного обдумывания.

Теперь, когда мы доказали все основополагающие теоремы выпуклого анализа, поговорим еще о некоторых красивых геометрических результатах, на которые вообще так богат выпуклый анализ. Одним из таких результатов, без сомнения, является формула Штейнера, которая позволяет вычислить площадь r-окрестности выпуклого множества $\mathscr{C}$. Напомним, что r-окрестностью множества $\mathscr{C}$, $r \geq 0$, называется совокупность точек, находящихся на расстоянии не больше r от $\mathscr{C}$:

$$\mathscr{C}_r = \left\{A \in \mathbb{E}^2 : d(A, \mathscr{C}) \leq r\right\}.$$

Обозначим через $S(\mathscr{C})$ площадь множества $\mathscr{C}$. Естественно ожидать, что при малых r площадь $S(\mathscr{C}_r)$ будет мало отличаться от площади $S(\mathscr{C})$. На самом деле оказывается, что $S(\mathscr{C}_r)$ есть квадратный трехчлен по r, коэффициенты которого определяются формой множества.

Теорема 6 (формула Штейнера). *Если $\mathscr{C}$ – выпуклое ограниченное множество, то площадь его r-окрестности отличается от площади самого множества $\mathscr{C}$ на сумму площади прямоугольника, одна из сторон которого имеет длину границы $\mathscr{C}$, а вторая равна r, и площади круга радиуса r (рис.9).*

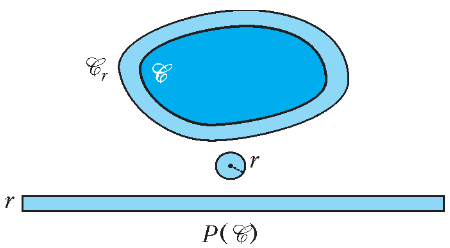


Рис. 9. Иллюстрация к формуле Штейнера

Длину границы $\mathscr{C}$ часто для краткости называют *периметром* (по аналогии с многоугольником) и обозначают $P(\mathscr{C})$. На алгебраическом языке формула Штейнера записывается так:

$$S(\mathscr{C}_r) = S(\mathscr{C}) + P(\mathscr{C})r + \pi r^2.$$

Отметим, что если $\mathscr{C}$ – точка, то $S(\mathscr{C}) = 0$ и $P(\mathscr{C}) = 0$, а если $\mathscr{C}$ – отрезок, то $S(\mathscr{C}) = 0$, а $P(\mathscr{C})$ есть удвоенная длина отрезка. В обоих этих случаях формула Штейнера легко проверяется. Для доказательства интерес представляют лишь выпуклые множества с непустой внутренностью.

Доказательство формулы Штейнера. Разберем сначала случай, когда множество $\mathscr{C}$ является выпуклым многоугольником с вершинами $A_1, \ldots, A_n$. В этом случае множество $\mathscr{C}_r$ состоит из самого многоугольника $\mathscr{C}$, прямоугольников $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$ высоты r, построенных на сторонах многоугольника, и секторов $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ окружностей радиуса r с центрами в вершинах многоугольника, как изображено на рисунке 10. Сумма площадей

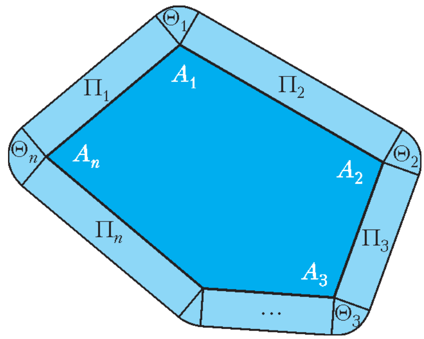


Рис. 10. Формула Штейнера для выпуклого многоугольника

прямоугольников Π_i, очевидно, равна периметру $P(\mathscr{C})$ многоугольника $\mathscr{C}$, умноженному на r. Вычислим сумму площадей секторов Θ_i. Как нетрудно увидеть, каждый сектор Θ_i имеет угол, равный внешнему углу многоугольника в своей вершине A_i. Поскольку сумма внешних углов многоугольника равна $360°$, то, если составить вместе все секторы Θ_i, получится в точности круг, а значит, сумма их площадей равна πr^2. Таким образом, $S(\mathscr{C}_r) = S(\mathscr{C}) + P(\mathscr{C})r + \pi r^2$.

Итак, мы доказали формулу Штейнера для случая, когда $\mathscr{C}$ – выпуклый многоугольник. А теперь докажем, что та же самая формула справедлива и для произвольного выпуклого множества $\mathscr{C}$ с непустой внутренностью. Чтобы это доказать, будем действовать так, как обычно действуют при вычислении площади круга и длины окружности. Впишем в $\mathscr{C}$ серию выпуклых многоугольников $\mathscr{C}^k$ так, что длины сторон $\mathscr{C}^k$ стремятся к 0 при $k \to \infty$. Тогда стороны $\mathscr{C}^k$ все теснее прилегают к границе $\mathscr{C}$. Поэтому площади многоугольников $\mathscr{C}^k$ стремятся к площади $\mathscr{C}$, а периметры $P(\mathscr{C}^k)$ стремятся к длине $P(\mathscr{C})$ границы $\mathscr{C}$. Зафиксировав любое $r > 0$, получим, что площади r-окрестностей $S(\mathscr{C}_r^k)$ стремятся к $S(\mathscr{C}_r)$. Поэтому при любом $r > 0$ имеем

$$\begin{array}{ccccccc} S(\mathscr{C}_r^k) & = & S(\mathscr{C}^k) & + & P(\mathscr{C}^k)r & + & \pi r^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \| \\ S(\mathscr{C}_r) & = & S(\mathscr{C}) & + & P(\mathscr{C})r & + & \pi r^2 \end{array}$$

что и завершает доказательство.

А теперь давайте задумаемся над обобщением формулы Штейнера на трехмерный случай. По аналогии можно предположить (а затем и доказать), что объем r-окрестности выпуклого множества $\mathscr{C}$ в трехмерном пространстве есть полином третьей степени по r:

$$a + br + cr^2 + dr^3 .$$

Достаточно очевидно, что a – это объем множества, b – это площадь поверхности множества, а d – объем единичного шара. Возникает естественный вопрос:

Какой «физический» смысл несет коэффициент c?

Приведем еще один красивый результат выпуклого анализа, который обычно называют кинематической формулой. Мы докажем ее на Евклидовой плоскости $\mathbb{E}^2$. Рассмотрим проекцию ограниченного выпуклого множества $\mathscr{C}$ на какую-либо прямую, проходящую через начало координат. Это будет, конечно, отрезок (или точка). Обозначим через $M(\mathscr{C})$ среднюю (по углу) длину проекции $\mathscr{C}$ на все прямые, проходящие через начало координат. Тогда периметр $P(\mathscr{C})$ можно вычислить через среднюю длину проекции.

Теорема 7 (кинематическая формула). *Если $\mathscr{C}$ – выпуклое ограниченное множество, то его периметр ровно в π раз больше его средней длины проекции:*

$$P(\mathscr{C}) = \pi M(\mathscr{C}).$$

С помощью кинематической формулы можно, например, вычислить длину границы r-окрестности произвольного выпуклого множества. Действительно, длина проекции $\mathscr{C}_r$ на любую прямую ровно на $2r$ больше, чем длина проекции $\mathscr{C}$ на ту же прямую (рис.11). Поэтому при

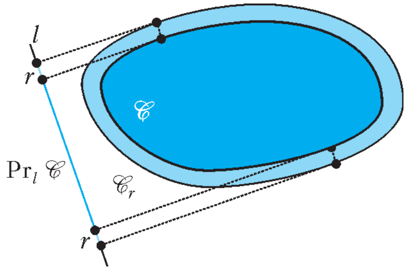


Рис. 11. Длина проекции r-окрестности множества

любом r

$$P(\mathscr{C}_r) = \pi M(\mathscr{C}_r) = \\ = \pi\big(M(\mathscr{C}) + 2r\big) = P(\mathscr{C}) + 2\pi r .$$

Таким образом, периметр $P(\mathscr{C}_r)$ всегда больше периметра $P(\mathscr{C})$ ровно на длину окружности радиуса r!

Рассмотрим шар размером с Землю. Представим себе, что мы натянули веревку, обхватывающую этот шар по экватору. Такая веревка должна иметь длину примерно 40000 километров. Спрашивается: если мы захотим равномерно приподнять веревку над шаром, скажем, на один метр, на сколько нам потребуется увеличить ее длину? Оказывается, всего на 2π метров, т.е. меньше чем на 7 метров, что на первый взгляд совершенно удивительно.

Задача 4. Выведите формулу $P(\mathscr{C}_r) = P(\mathscr{C}) + 2\pi r$ из формулы Штейнера.

Доказательство кинематической формулы. При параллельном переносе множества $\mathscr{C}$ или его повороте средняя длина проекции $M(\mathscr{C})$ не меняется. Разберемся, что происходит при гомотетии с коэффициентом γ. Длина проекции на каждую прямую увеличивается в γ раз, и, следовательно, средняя длина проекции тоже увеличивается в γ раз. Поэтому если мы обозначим через λ среднюю длину проекции единичного отрезка, то средняя длина проекции отрезка длины a будет λa. Мы пока не можем явно вычислить число λ, но сможем сделать это в конце доказательства.

Докажем сначала кинематическую формулу для случая, когда $\mathscr{C}$ – выпуклый многоугольник с вершинами $A_1,\ldots,A_n$. Пусть l – любая прямая. Рассмотрим проекцию многоугольника $\mathscr{C}$ и его сторон на l (рис.12). Проекция многоугольника $\mathscr{C}$

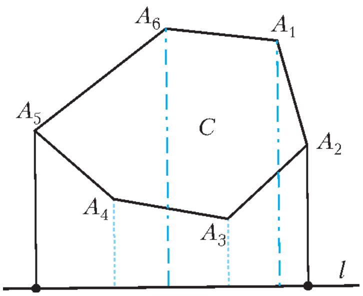


Рис. 12. Сумма длин проекций сторон многоугольника в 2 раза больше длины проекции самого многоугольника

на прямую l в два раза меньше суммы длин проекций сторон на ту же прямую! Тем самым, если обозначить через $\mathrm{Pr}_l(\mathscr{C})$ длину проекции $\mathscr{C}$ на l, то получим

$$\mathrm{Pr}_l(\mathscr{C}) = \frac{1}{2}\big(\mathrm{Pr}_l(A_1A_2) + \mathrm{Pr}_l(A_2A_3) + \ldots + \mathrm{Pr}_l(A_nA_1)\big).$$

Поэтому и средняя длина проекции многоугольника в два раза меньше суммы средних длин проекций его сторон:

$$M(\mathscr{C}) = \frac{1}{2}\big(M(A_1A_2) + M(A_2A_3) + \ldots + M(A_nA_1)\big).$$

Но мы уже вычислили среднюю длину проекции отрезка любой длины через проекцию отрезка единичной длины! Значит, справа мы получаем число, в $\frac{\lambda}{2}$ раза большее периметра многоугольника $\mathscr{C}$, т.е.

$$M(\mathscr{C}) = \frac{\lambda}{2}P(\mathscr{C}),\text{ или } P(\mathscr{C}) = \frac{2}{\lambda}M(\mathscr{C}).$$

Таким образом, мы доказали формулу для случая, когда $\mathscr{C}$ – многоугольник. Случай произвольного множества $\mathscr{C}$ получается аналогично формуле Штейнера с помощью приближения многоугольниками. А именно: пусть $\mathscr{C}^k$ – такой вписанный в $\mathscr{C}$ выпуклый многоугольник, что расстояние от любой точки $\mathscr{C}$ до $\mathscr{C}^k$ не больше $\frac{1}{k}$. Тогда длина проекции $\mathscr{C}^k$ на любую прямую l не может отличаться слишком сильно от длины проекции $\mathscr{C}$ на ту же прямую, а именно:

$$\mathrm{Pr}_l\left(\mathscr{C}^k\right) \le \mathrm{Pr}_l(\mathscr{C}) \le \mathrm{Pr}_l\left(\mathscr{C}^k\right) + \frac{2}{k}.$$

Следовательно, теми же неравенствами связаны и их средние:

$$M\left(\mathscr{C}^k\right) \le M(\mathscr{C}) \le M\left(\mathscr{C}^k\right) + \frac{2}{k}.$$

Поскольку $M\left(\mathscr{C}^k\right) = \frac{\lambda}{2}P\left(\mathscr{C}^k\right)$, то левая и правая части при $k \to \infty$ стремятся к $\frac{\lambda}{2}P(\mathscr{C})$, поэтому $M(\mathscr{C}) = \frac{\lambda}{2}P(\mathscr{C})$ для любого выпуклого множества $\mathscr{C}$.

Итак, $P(\mathscr{C}) = \frac{2}{\lambda}M(\mathscr{C})$ для любого выпуклого ограниченного множества. Подчеркнем еще раз, что число λ – одно и то же для всех выпуклых множеств. Найдем его. Если $\mathscr{C} = \mathcal{B}_r$ – это круг радиуса r, то длина его границы есть $P(\mathcal{B}_r) = 2\pi r$. При этом проекция на любую прямую имеет длину $2r$, поэтому и средняя длина проекции есть $2r$. Таким образом, мы получаем уравнение на λ:

$$P(\mathcal{B}_r) = \frac{2}{\lambda}M(\mathcal{B}_r) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\pi r = \frac{2}{\lambda}2r \Rightarrow \frac{2}{\lambda} = \pi \Rightarrow \lambda = \frac{2}{\pi}$$

и, следовательно, $P(\mathscr{C}) = \pi M(\mathscr{C})$ для любого выпуклого множества $\mathscr{C}$.

Рассмотрим одно из простейших применений кинематической формулы. Пусть $\mathscr{C}_1$ и $\mathscr{C}_2$ – выпуклые ограниченные множества. Обозначим (как это сделано в уже упомянутой статье [5]) через $\mathscr{C}_1 * \mathscr{C}_2$ множество середин отрезков, один конец которых принадлежит $\mathscr{C}_1$, а второй – $\mathscr{C}_2$. Множество $\mathscr{C}_1 * \mathscr{C}_2$, конечно, выпукло.

Задача 5. Докажите, что длина границы множества $\mathscr{C}_1 * \mathscr{C}_2$ есть полусумма длин границ множеств $\mathscr{C}_1$ и $\mathscr{C}_2$.

Идея, заложенная в кинематической формуле, оказывается очень продуктивной в пространствах бóльших размерностей. Например, в трехмерном случае средняя площадь проекции выпуклого множества на (двумерные) плоскости есть (с точностью до постоянного множителя) площадь его поверхности, а средняя длина его проекции на (одномерные) прямые есть (опять же, с точностью до некоторого множителя) коэффициент c при r^2 в трехмерной формуле Штейнера, о «физическом» смысле которого мы спрашивали ранее. В n-мерном пространстве этот подход позволяет построить серию *смешанных объемов* выпуклого тела, каждый из которых является новой дополнительной «физической» характеристикой тела наряду с его объемом и площадью поверхности.

Авторы выражают глубокую благодарность М.В.Козлову за ценные советы и замечания.

Литература

1. Начала Евклида. Книги I–VI. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1948 («Классики естествознания»).

2. *T.Bonnesen, W.Fenchel.* Theorie der Konvexen Körper. – Teubner, Leipzig, 1934.

3. *Г.Г.Магарил-Ильяев, В.М.Тихомиров*. Выпуклый анализ и его приложения. – М.: Либроком, 2016.

4. *L.W.Szczerba and W.Szmielew.* On the Euclidean geometry without the Pasch axiom. – Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 18 (1970), 659–666.

5. *Н.Васильев*. Сложение фигур. – «Квант», 1976, №4.

6. *В.Тихомиров.* Теорема Ферма–Эйлера о двух квадратах. – «Квант», 1991, №10.

НАМ ПИШУТ

Вероятность и последняя цифра произведения

Наш читатель Е.Знак заметил и доказал, что цифра «1» обладает следующим интересным свойством: она *не более вероятна*, чем любая другая цифра, как последняя цифра произведения двух случайных натуральных чисел и она *не менее вероятна*, чем любая другая цифра, как последняя цифра степени случайного натурального числа со случайным натуральным показателем.

Прежде всего надо определиться, в каком смысле говорится о случайных натуральных числах. Будем считать, что вероятность выбора числа с данной последней цифрой для всех цифр одинакова и равна $1/10$. Аналогично, вероятность выбора числа с данным остатком при делении на 4 равна $1/4$, и т.д. Такая договоренность вполне соответствует следующей модели выбора натурального числа: из данного большого количества N подряд идущих натуральных чисел с равной вероятностью выбирается одно так, что вероятность выбора конкретного числа равна $1/N$.

Таблица умножения остатков при делении на 10 (табл.1) позволяет легко *непосредственно* сосчитать вероятность того, что произведение двух случайных натуральных чисел оканчивается на данную цифру. В этой таблице меньше всего цифр «1», «3», «7», «9» – по четыре штуки,

Таблица 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
3	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4
7	0	7	4	1	8	5	2	9	5	3
8	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2
9	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

(Продолжение см. на с. 29)

Сергей Петрович Новиков

(к 80-летию со дня рождения)

20 марта 2018 года исполнилось 80 лет одному из крупнейших математиков современности – академику Сергею Петровичу Новикову. В 1970 году за замечательные результаты по алгебраической топологии С.П.Новиков первым из советских математиков был удостоен Филдсовской медали – высшей награды Международного математического союза. Позже его научные интересы сместились в направлении математической физики, в частности в теорию интегрируемых систем и солитонных уравнений. В этой области им также получен ряд выдающихся результатов и создана замечательная научная школа.

Долгие годы С.П.Новиков был членом редколлегии нашего журнала, с 1990 по 2007 год – первым заместителем главного редактора. В настоящее время С.П.Новиков входит в редакционный совет «Кванта».

Предлагаем нашим читателям отрывки из статьи С.П.Новикова «Роль интегрируемых моделей в развитии математики»[1], в которых он рассказывает о том, как он изучал математику и физику, и о своих первых шагах в науке.

Начало карьеры: топология

Моя математическая жизнь началась с алгебраической топологии; я работал в этой области более десяти лет, да и сейчас я считаю себя в первую очередь специалистом по алгебраической топологии. Когда в начале 50-х годов я начинал заниматься математикой, Россия, жившая за железным занавесом, была страной очень темной. Тем не менее у нас была очень большая и сильная математическая школа, главой которой в то время был в Москве А.Н.Колмогоров. Я считаю, что это был величайший математик, которого можно поставить в один ряд с Пуанкаре, Гильбертом и Германом Вейлем. Учениками Колмогорова были многие знаменитые математики: И.М.Гельфанд, В.И.Арнольд и другие (но не я).

В московской математической школе существовала единая точка зрения на то, что является важным, а что нет. «Важными» разделами науки были теория множеств, логика, функциональный анализ и уравнения в частных производных (не в смысле решения конкретных уравнений, а в смысле доказательства строгих теорем и разработки оснований). В российской математике того периода, как и во французской математике, основной целью было построение различных аксиоматизаций, и ведущие математики именно этим и занимались.

[...]

В конце 1956 года я, будучи студентом второго курса, должен был выбрать для себя (хотя бы временно) конкретную область математики, чтобы иметь возможность участвовать в семинарах. Мое внимание привлекло объявление, вывешенное на мехмате МГУ за подписями М.М.Постникова, В.Г.Болтянского и А.С.Шварца (последний был аспирантом, но молодым математиком он не считался: в тогдашней

России люди в возрасте 25 лет не считались молодыми). В объявлении говорилось, что появилась новая увлекательная наука – современная алгебраическая топология.

[…]

Мои друзья, такие как выросшие в семинаре Колмогорова Арнольд и Я.Г.Синай или выросший в семинаре Понтрягина по оптимальному управлению Д.В.Аносов, спрашивали меня, зачем я учу такую странную и «совершенно бесполезную» науку, вместо того чтобы учить такие важные вещи, как теория вероятностей или уравнения с частными производными: топология была полностью вне сферы интересов российского математического сообщества. Постников говорил мне, что у топологии нет никаких перспектив, но я, возможно, смогу что-нибудь найти в гомологической алгебре[2]. Энтузиазм сохранял только Шварц, но он уехал из Москвы вскоре после завершения своей диссертации.

Свою первую статью я опубликовал в 21 год. В то время я не был «молодым»: у таких людей, как, например, Арнольд, публикации появлялись уже в 18–19 лет, и это не считалось чем-то необычным. Я вырос в семье математиков[3], и моя мать жаловалась, что у всех уже есть научные публикации, кроме ее сына.

Я начал свою работу с теории гомотопий[4]. М.М.Постников и Е.Б.Дынкин сделали очень хорошие переводы целого ряда знаменитых статей, принадлежавших в основном французским авторам: Ж.-П.Серру, А.Картану, Р.Тому и другим. Мы изучали их на нашем семинаре. Я был впечатлен блестящими статьями Фрэнка Адамса, бывшего в то время ведущим специалистом по теории гомотопий. Он начинал как совершенно блестящий ученый, решавший знаменитые проблемы.

Это было очень интересное время.

[…]

Мы с Аносовым, вместе с Арнольдом, Синаем, И.Р.Шафаревичем и Ю.И.Маниным, образовали группу математиков, учившихся различным разделам науки друг у друга. Позднее к нам присоединилась и группа Гельфанда. Специалисты по уравнениям в частных производных начали взаимодействовать с нами после того, как появившийся в это время в Москве А.И.Вольперт открыл в начале 60-х годов индекс операторов; это было еще до статьи Атьи и Зингера[5]: напротив, Атья и Зингер написали свою статью уже после того, как Гельфанд разрекламировал результаты Вольперта.

Более или менее серьезно к топологии стали относиться после 1961 года. Основной вопрос, который я себе задавал, был такой: «Зачем мы работаем?» Как я уже говорил, у меня были хорошие связи. Я консультировал своих друзей Арнольда и Аносова; в результате я ввязался в исследование слоений – в связи с задачами из теории динамических систем, поставленными Смейлом. Другие друзья помогали мне с задачами об индексе, происходившими из школы Гельфанда, обучая меня уравнениям с частными производными (я об этом тоже кое-что написал) и обучаясь у меня топологии. Очень полезны были алгебраические геометры: они помогали мне разобраться в том, как в топологии работают некоторые алгебраические понятия. И тем не менее очень скоро я обнаружил, что, сколь бы быстро я ни продвигался в математике, я по-прежнему не могу ответить на основной вопрос о цели своей деятельности. Я обнаружил, что теория уравнений с частными производными была не менее абстрактна, чем топология, а теория вероятностей – и более. (Я сам теорией вероятностей никогда не занимался: про нее мне рассказывал мой друг Синай, который и сам перешел из теории вероятностей в теорию динамических систем.) Динамические системы были областью гораздо более красивой и новой, но и они не имели никакого отношения к реальному миру, поскольку эта теория была малоизвестна: для специалистов по естественным наукам она в то время была слишком трудна.

Разрыв между математикой и физикой

Арнольд на своем семинаре научил меня аналитической механике и основам гидродинамики (в рамках классической, но не квантовой механики). На самом деле в середине 20-х годов, после создания квантовой механики, в России (и не только в России) пути математики и физики серьезно разошлись. Лучшие математики – современники Колмогорова – за очень немногими исключениями не знали даже математического языка теоретической физики. Новый язык теоретической физики начал создаваться примерно в 1925 году. Судя по тому, что писали физики того времени, решающим моментом в расхождении математики и физики было возникновение не теории относительности, ее роль была осознана позднее, а квантовой теории. В Москве, вероятно, один лишь Гельфанд выучил новую физику. Иногда физики участвовали и в работе его семинара; однако в конце 50-х годов Гельфанд полностью прекратил эту деятельность, и физики пропали с его семинара на целых двадцать лет.

[...]

Изучение физики

[...]

Одновременно и независимо друг от друга мы [с Ю.И.Маниным] решили изучить квантовую физику (мой брат[6] говорил мне, что математики должны обязательно знать квантовую теорию). Сначала я пытался выучить квантовую теорию поля так же, как математики обычно учат новые вещи, и обнаружил, что эта задача совершенно невыполнима; возможно, такая попытка и вовсе глупа. Стиль, который мне очень нравится, – это стиль лекций Эйнштейна или лучших лекций Ландау. Я понял, что основой этой науки является естественность, – и ровно это же я ранее понял из чтения книг по топологии. Топологи того времени, такие как Жан-Пьер Серр, Рене Том или Джон Милнор, иногда в своих лекциях опускали определения, они просто говорили: «это определяется естественным образом». И вот я узнал этот стиль «естественности» в лекциях Эйнштейна и в лучших книгах Ландау. (Не все книги Ландау одинаково хороши, но собрание их всех очень ценно. Наши студенты, желающие заниматься теоретической физикой, должны изучить все эти книги к 22 годам. Это основа для начала самостоятельной работы.)

Мы с Маниным обсуждали различные парадоксы и неясности квантовой теории, к которым мы относились одинаково. Помню, как Манин говорил мне, что всякий математик эти неясности обнаружит, но что при этом было бы ошибкой остановиться и заняться критикой этих неясностей. Многие математики, включая моих учеников, испытывают серьезные трудности при изучении теоретической физики. Они пытаются учить ее так же, как математику: если они натыкаются на что-то непонятное, они останавливаются. Я могу с уверенностью сказать, что физики также натыкаются на множество непонятных вещей; тем не менее надо продолжать двигаться вперед, а продумывать эти непонятные вещи надо только выйдя на определенный уровень и достаточно поупражнявшись.

Очень трудно выполнить программу Гильберта и переписать теоретическую физику в аксиоматическом стиле. Гильберт проделал важную работу после того, как Эйнштейн открыл общую теорию относительности: он понял, что уравнение Эйнштейна является уравнением Эйлера–Лагранжа для некоторого функционала. Таким образом он нашел подтверждение (для случая уравнения Эйнштейна) того общего принципа, что аксиомы всякой фундаментальной физической теории должны начинаться с принципа Лагранжа[7]. Тем самым программа Гильберта оказалась полезна для него самого, коль скоро он применил ее таким образом. Однако же мне не нравятся попытки некоторых моих друзей – очень хороших специалистов по математической физике, работающих по программе Гильберта, – сделать физику строгой. Я думаю, что это невозможно. Можно доказать хорошую теорему здесь, хорошую теорему там о некоторой физической ситуации. Тем не менее, я уверен, что Ричард Фейнман был прав, когда говорил, что глобально этого добиться невозможно (иногда это могло бы получиться локально). Развитие физики протекает быстрее, чем появляются теоремы, с помощью которых ее пытаются аксиоматизировать. Процент того, что можно сделать строго, стремится к нулю: само количество хороших теорем растет, а вот отношение все равно очень быстро убывает.

Я потратил не менее пяти лет (с 1965 по 1970 год) исключительно на изучение физики. Иногда половина моего рабочего времени уходила на то, чтобы изучать физику так же, как ее учил бы студент: по книгам Ландау и Лифшица, Эйнштейна и др. В 1970 году я решил наладить связи с физиками школы Ландау, работавшими в незадолго до того – в 1965 году – созданном институте Ландау[8]. В среде физиков (и даже инженеров) циркулировали слухи о том, что в математике разрабатывается какая-то очень интересная теория – алгебраическая топология (разумеется, такие вещи, как динамические системы, они тоже считали «топологией»). Исаак Халатников сказал мне, что у сотрудников Института Ландау есть очень хорошие задачи по общей теории относительности, но им нужен тополог. Вот так в конце 1970 года я стал сотрудничать с физиками. К этому времени я уже был знаком с общей теорией относительности, которую я выучил как часть дифференциальной геометрии. (Выучил ее я отнюдь не по математическим книгам. Лучшие книги по общей теории относительности – это книги, написанные физиками, их надо читать, даже если ты ставишь своей целью понять математическую сторону этой теории. Я рекомендую начинать с лекций Эйнштейна; книги Ландау и Лифшица, Мизнера или Торна также очень хороши.)

Примечания

[1] Сергей Петрович Новиков. К семидесятилетию со дня рождения. Интервью, статьи, выступления / Редактор-составитель В.М.Бухштабер. – М.: МЦНМО, 2008.

Также рекомендуем нашим читателям интервью с Сергеем Петровичем Новиковым, опубликованное в десятом номере «Кванта» за 1984 год.

[2] Одной из важнейших операций в топологии является операция взятия границы геометрической фигуры (например, граница шара – сфера, граница круга – окружность, а граница отрезка – его концы). Гомологическая алгебра – область математики, возникшая из попытки формализации основополагающего свойства этой операции: граница границы фигуры пуста («равна нулю»). Первоначально гомологическая алгебра развивалась как удобный язык для топологии. Однако к настоящему времени ее значение вышло далеко за пределы топологии: ее методы играют ключевую роль в алгебраической геометрии, теории групп и многих других разделах математики.

[3] Родители С.П.Новикова – выдающиеся математики: отец, академик Петр Сергеевич Новиков (1901–1975) – крупнейший специалист в области математической логики, теории групп и теории алгоритмов; мать, Людмила Всеволодовна Келдыш (1904–1976) – специалист по геометрической топологии и теории множеств, решившая ряд труднейших проблем в этих областях.

[4] Область топологии, изучающая непрерывные отображения одной фигуры в другую с точностью до их непрерывной деформации.

[5] Теорема об индексе оператора, доказанная Майклом Атьей и Изадором Зингером в 1963 году, – одна из вершин математики XX века. Она устанавливает важнейшую связь между алгебраической топологией и дифференциальными уравнениями в частных производных и имеет огромное количество приложений в различных областях математики и в теоретической физике.

[6] Старший брат С.П.Новикова, Леонид Вениаминович Келдыш (1931–2016) – выдающийся физик-теоретик, специалист в области физики твердого тела, физики полупроводников, квантовой радиофизики.

[7] Принцип наименьшего действия Лагранжа – фундаментальный физический принцип, утверждающий, что из всех траекторий, соединяющих известные положения частицы в некоторые два момента времени, частица «выбирает» ту, для которой минимизируется специальная величина, называемая действием. Одним из проявлений этого принципа является факт, что свет между двумя точками (в вакууме) распространяется по кратчайшему пути.

[8] Институт теоретической физики имени Л.Д.Ландау Российской академии наук.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи М2514–М2517 предлагались на заключительном этапе XLIV Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Задачи М2514–М2517, Ф2521–Ф2524

М2514. Даны натуральные числа a и b. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что число a^n+1 не делится на n^b+1.

А.Голованов

М2515. В карточной игре каждой карте сопоставлено числовое значение от 1 до 100, причем каждая карта бьет меньшую, за одним исключением: 1 бьет 100. Игрок знает, что перед ним лежат рубашками вверх 100 карт с различными значениями. Крупье, знающий порядок этих карт, может про любую пару карт сообщить игроку, какая из них какую бьет. Докажите, что крупье может сделать сто таких сообщений, чтобы после этого игрок смог точно узнать значение каждой карты.

И.Богданов, К.Кноп, Ю.Кузьменко

М2516*. Изначально на доске записано натуральное число. Затем каждую секунду к текущему числу прибавляют произведение всех его ненулевых цифр. Докажите, что найдется натуральное a такое, что прибавление числа a случится бесконечное количество раз.

Д.Крачун

М2517*. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки P и Q соответственно так, что $PQ \parallel BC$ (рис. 1). Отрезки BQ и CP пересекаются в точке O. Точка A' симметрична точке A относительно прямой BC. Отрезок $A'O$ пересекает окружность ω, описанную около треугольника APQ, в точке S. Докажите, что окружность, описанная около треугольника BSC, касается окружности ω.

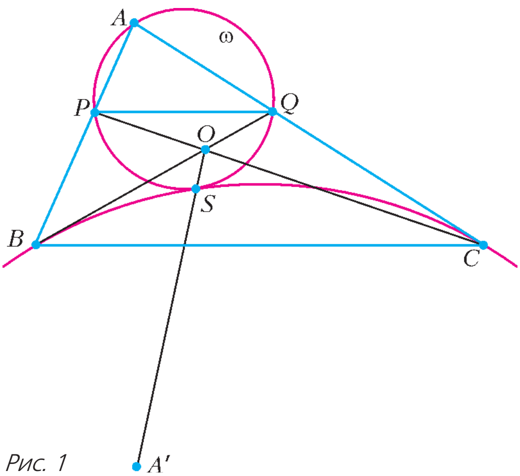


Рис. 1

А.Кузнецов

Ф2521. В результате столкновения астероидов образовались два осколка, разлетающиеся с одинаковыми скоростями, направленными под углом φ друг к другу. Найдите отношение полуосей орбиты первого осколка, если орбита второго оказалась круговой. Орбиты осколков лежат в одной плоскости.

Д.Александров

Ф2522. На горизонтальной дороге перед красным светофором скопилась колонна

Рис. 2

одинаковых по массе легковых автомобилей (рис.2). Дорога скользкая, коэффициент трения колес о дорогу $\mu = 0{,}264$. Расстояния между стоящими друг за другом автомобилями $l = 0{,}3$ м. Все машины в стоящей колонне одинаково удерживаются на месте системами ручного тормоза, действующими только на задние колеса (блокируется их вращение). У очередной подъезжавшей к неподвижной колонне легковой автомашины «отказала» основная система тормозов, но водитель успел дернуть рычаг ручного тормоза за секунду до столкновения, т.е. его автомобиль тормозил не очень эффективной системой ручного тормоза. Аварии избежать не удалось, и автомобиль с неисправными тормозами «собрал» перед собой четыре автомобиля. Удары автомобилей были абсолютно неупругие, т.е. после столкновения автомобили «сцеплялись» друг с другом. Какой была скорость автомобиля виновника аварии на расстоянии l от первого пострадавшего автомобиля, если пятому на очереди автомобилю «повезло» – к нему «сборка» только прикоснулась? Нагрузка на колеса всех автомобилей распределялась равномерно.

А.Власов

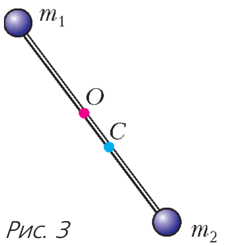


Рис. 3

Ф2523. Гантелька длиной l с массами m_1 и m_2 на концах, будучи подвешена в точке O, совершает малые колебания в окрестности устойчивого равновесия, оставаясь в вертикальной плоскости, проходящей через точку подвеса (рис.3). Найдите частоту и период этих колебаний, если точка подвеса удалена от центра масс – точки C – на расстояние d.

А.Буров

Ф2524. Незаряженный плоский конденсатор емкостью C_1 расположен во внешнем однородном электрическом поле E_0,

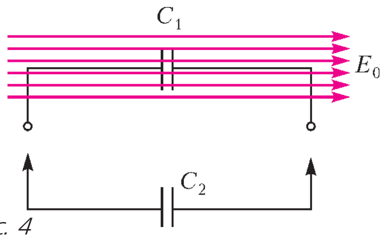


Рис. 4

перпендикулярном плоскостям его обкладок (рис.4). Расстояние между обкладками d. Конденсатор емкостью C_2, несущий на своих пластинах заряды $\pm q_0$ (плюс на обкладке слева), подключается к первому конденсатору. Определите заряды q_1 и q_2 на левых пластинах конденсаторов после подключения. Влиянием внешнего электрического поля в месте нахождения второго конденсатора пренебречь.

С.Крюков

Решения задач М2502–М2505, Ф2509–Ф2512

М2502. *Петя и Вася по очереди выписывают на доску натуральные числа, не превосходящие 2018 (выписывать уже имеющееся число запрещено); начинает Петя. Если после хода игрока на доске оказываются три числа, образующих арифметическую прогрессию, этот игрок выигрывает. У кого из игроков есть стратегия, позволяющая ему гарантированно выиграть?*

Рассмотрим момент после третьего хода (когда выписаны три числа). Если к этому моменту никто еще не выиграл, то следующим ходом Вася выигрывает – ему достаточно найти два выписанных числа одной четности и выписать своим ходом их среднее арифметическое (оно является целым числом).

Кроме того, заметим, что если три целых числа из множества 1, 2, 3, …, 2018 образуют арифметическую прогрессию, то ее разность не больше 1008 (иначе разность между наибольшим и наименьшим числами будет не менее $2 \cdot 1009 = 2018$, что невозможно).

Теперь опишем выигрышную стратегию Васи.

(Продолжение см. на с. 26)

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПАРК

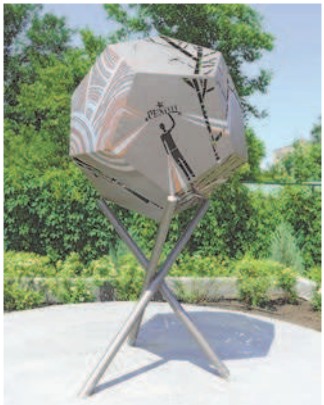
Музей математики под открытым небом «Математический парк» — вписанная в городское пространство коллекция арт-объектов, иллюстрирующих математические факты и понятия. Целью проекта является популяризация математики, пробуждение интереса и мотивации к занятиям этой наукой у детей и взрослых.

Математический парк создан в городе Майкопе, в Республике Адыгея на базе Республиканской естественно-математической школы (РЕМШ). На протяжении вот уже 20 лет она готовит лучших школьников из республики Адыгея до уровня призеров и победителей Всероссийской олимпиады по различным предметам. Около 50 выпускников ежегодно поступают в лучшие столичные вузы.

Красные дорожки во дворике РЕМШ иллюстрируют знаменитую задачу о Кёнигсбергских мостах, беседка – триангуляцию.

Лист Мёбиуса (см. 1-ю страницу обложки), являющийся логотипом РЕМШ, выполнен из доломита. На его односторонней поверхности выгравированы три изображения всемирно известных археологических находок, обнаруженных в курганах Адыгеи: серебряный сосуд ритон, имеющий скульптурное окончание в виде крылатого коня пегаса, золотая бляха-накладка в виде лежащего оленя, нащитная золотая бляха в виде пантеры. Эти находки свидетельствуют о богатейшем историко-культурном наследии Адыгеи. Летящий олень, найденный в кургане в городе Майкопе, относится к древнейшей из известных культур, существовавших на территории современной России (конец IV–середина II тысячелетия до н.э.). Эта культура получила название майкопской.

Додекаэдр – один из пяти правильных многогранников в трехмерном пространстве.



Идея скульптуры принадлежит Асе Еутых, члену Союза художников России, народному художнику Республики Адыгея, а исполнение – Татьяне Вагановой, дизайнеру, члену Союза художников России.

Классическая геометрическая интерпретация теоремы Пифагора, с квадратами, пост-

роенными на сторонах треугольника, выбрана символом Математического парка. Несмотря на то, что существует множество реализаций – с переливанием воды, пересыпанием песка; не с квадратами, а любыми подобными фигурами, построенными на сторонах, – простейшая минималистическая конструкция смотрится завораживающе.

Однополостный гиперболоид вращения – поверхность второго порядка, через каждую

точку которой проходят две прямые. Это свойство было использовано известным российским инженером В.Г.Шуховым для постройки башен. «Гиперболоидных башен» было построено более 200, одна из сохранившихся расположена в Краснодаре, в аэропорт которого прилетают гости Майкопа.

Невозможный треугольник был придуман

О.Рутерсвардом в 1934 году и стал широко известен после статьи Р.Пенроуза 1958 года. Идеи построения подобных объектов использовал М.Эшер в своих литографиях («Спускаясь и поднимаясь», «Водопад»).

На стене геометрии приведены чертежи из книги А.В.Акопяна «Геометрия в картин-

ках» – сборника теорем классической геометрии, сформулированных в виде картинок. Они нарисованы таким образом, что соответствующие им утверждения можно восстановить без текста.

Многогранник Силашши – единственный, кроме тетраэдра, известный многогранник, у

которого любые две грани имеют общее ребро.

Участники проекта: Республиканская естественно-математическая школа; Кавказский математический центр – научно-образовательный центр на базе Адыгейского государственного университета; Математический институт имени В.А.Стеклова РАН.

Планируется разместить математические арт-объекты по всему Майкопу. Приглашаем другие города присоединиться к этому проекту!

Сайт проекта:
http://museum.adygmath.ru

Материал подготовили
Н.Андреев и Д.Мамий

(Начало см. на с. 22)

Пусть первым ходом Петя выписал число a. Предположим, что $a \le 1009$. Тогда Вася выписывает число $a + 1009$. После этого хода выписаны два числа разной четности; значит, они не могут быть первым и третьим членами арифметической прогрессии из целых чисел. А поскольку их разность равна 1009, они также не могут быть соседними членами прогрессии. Тем самым, Петя не сможет выиграть третьим ходом. Но в этом случае, как мы видели ранее, следующим ходом Вася выиграет. Если же $a \ge 1010$, то Вася отвечает числом $a - 1009$. Дальнейшие рассуждения аналогичны первому случаю.

Отметим, что в аналогичной игре, с заменой 2018 на произвольное $n \ge 3$, Вася имеет выигрышную стратегию тогда и только тогда, когда n имеет остаток 2 при делении на 4.

М.Дидин, П.Кожевников

М2503. *Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = \angle C = 30°$ (рис. 1). На его сторонах AB, BC и AC выбраны точки D, E и F*

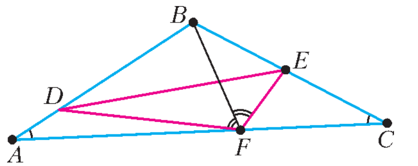


Рис. 1

соответственно так, что $\angle BFD = \angle BFE = 60°$. Периметр треугольника ABC равен p, а периметр треугольника DEF равен p_1. Докажите, что $p \le 2p_1$.

Пусть $\angle AFD = \alpha$. Поскольку угол BDF внешний для треугольника ADF, то $\angle BDF = \angle DAF + \angle AFD = 30° + \alpha$. Также угол BFA внешний для треугольника BFC, поэтому $60° + \alpha = \angle BFA = \angle FBE + \angle FCB$. Следовательно, $\angle FBE = 30° + \alpha = \angle FDB$ (рис. 2) Тогда, так как

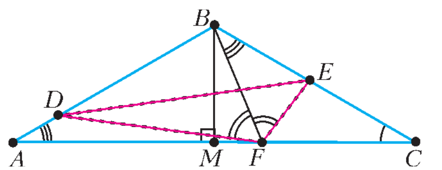


Рис. 2

$\angle BFD = \angle BFE = 60°$, треугольники BDF и EBF подобны. Значит, $\frac{BF}{FE} = \frac{DF}{BF}$, или $BF^2 = DF \cdot FE$. Отсюда следует, что $DF + EF \ge 2\sqrt{DF \cdot EF} = 2BF$.

По теореме косинусов для треугольника DEF имеем

$$DE = \sqrt{DF^2 + EF^2 + DF \cdot EF} \ge$$
$$\ge \sqrt{2DF \cdot EF + DF \cdot EF} = BF\sqrt{3}.$$

Следовательно,

$$p_1 = DF + EF + DE \ge \left(2 + \sqrt{3}\right)BF.$$

Пусть BM – высота равнобедренного треугольника ABC. Тогда легко видеть, что

$$p = (AB + BC) + AC = 4BM + 2\sqrt{3}BM =$$
$$= 2\left(2 + \sqrt{3}\right)BM.$$

Осталось заметить, что $BF \ge BM$, поэтому

$$2p_1 \ge 2\left(2 + \sqrt{3}\right)BF \ge 2\left(2 + \sqrt{3}\right)BM = p.$$

А.Кузнецов

М2504. *Докажите, что найдется такое натуральное число $n > 10^{2018}$, что сумма всех простых чисел, меньших n, взаимно проста с n.*

При $n > 1$ обозначим через $S(n)$ сумму всех простых чисел, меньших n. Заметим, что

$$S(n) < 1 + 2 + \ldots + (n-1) =$$
$$= \frac{n(n-1)}{2} < n(n-1). \quad (*)$$

Рассмотрим два последовательных простых числа $q > p > 10^{2018}$. Предположим, что $S(p)$ не взаимно просто с p, а $S(q)$ не взаимно просто с q. Тогда $S(p)$ делится на p, а $S(q)$ делится на q. Пусть $S(p) = pk$; из неравенства $(*)$ вытекает, что $k < p - 1$. Так как $S(q) = S(p) + p = p(k+1)$ и $S(q)$ делится на q, то $k + 1 \ge q$; однако $k < p - 1 < q - 1$. Полученное противоречие показывает, что одно из чисел p и q подходит.

Р.Салимов

М2505. *В компании 100 детей, некоторые дети дружат (дружба всегда взаим-*

на). Известно, что при выделении любого ребенка оставшихся 99 детей можно разбить на 33 группы по три человека так, чтобы в каждой группе все трое попарно дружили. Найдите наименьшее возможное количество пар дружащих детей.

Ответ: 198.

Переведем задачу на язык графов, сопоставляя ребенку вершину, а дружбе – ребро. Тогда нам известно, что в данном графе на 100 вершинах при удалении любой вершины оставшиеся можно разбить на 33 тройки так, что в каждой тройке вершины попарно соединены. Требуется же найти минимальное возможное число ребер в таком графе.

Для начала построим пример ровно с 198 ребрами. Разобьем 99 вершин, кроме вершины A, на 33 группы по 3 вершины. Соединим попарно вершины в каждой тройке; наконец, соединим A со всеми другими вершинами. Тогда условия задачи выполнены: при удалении A разбиение на тройки уже приведено, а при удалении любой другой вершины B в этом же разбиении достаточно заменить B на A. При этом в описанном графе всего $33 \cdot 3 + 99 = 198$ ребер.

Осталось доказать, что это количество – наименьшее. Назовем граф на $3k + 1$ вершинах *хорошим*, если при удалении любой вершины остальные $3k$ вершин разбиваются на k троек попарно соединенных. Докажем индукцией по k, что в хорошем графе на $3k + 1$ вершинах хотя бы $6k$ ребер; при $k = 33$ получим требуемую оценку. База при $k = 1$ несложна: так как при удалении любой вершины три остальные попарно соединены, любые две вершины должны быть соединены, т.е. число ребер равно $C_4^2 = 6$.

Докажем переход индукции. Если из каждой вершины выходит хотя бы по 4 ребра, общее количество ребер не меньше $(3k+1) \cdot 4/2 = 2(3k+1)$, что даже больше, чем требуемое $6k$. В противном случае найдется вершина A, соединенная не более чем с тремя другими. Если удалить любую вершину, кроме A, то A попадет в какую-то тройку, а значит, она соединена хотя бы с двумя вершинами. Если удалить одну из этих вершин, у A останется не менее двух смежных, т.е. было их не меньше трех. Итак, A соединена ровно с тремя вершинами B, C и D. Тогда при удалении, скажем, B вершины A, C и D образуют тройку, т.е. C и D соединены; аналогично получаем, что B, C и D попарно соединены.

Выбросим теперь из нашего графа вершины A, B, C и D, взамен добавив одну вершину X, соединенную со всеми, с кем была соединена хотя бы одна из вершин B, C и D. Заметим, что при этом количество ребер уменьшилось хотя бы на 6 (т.е. на количество ребер между A, B, C и D). Покажем, что полученный *новый граф* хороший; отсюда будет следовать переход индукции, ибо тогда в новом графе будет не менее $6(k-1)$ ребер, а значит, в исходном – не менее $6(k-1)+6=6k$ ребер.

Пусть из нового графа удалена некоторая вершина $Y \neq X$. Если ее удалить из исходного графа, остальные вершины разобьются на тройки; пусть при этом вершина A окажется, для определенности, в тройке с B и C, а вершина D – в другой тройке. Тогда можно разбить новый граф так же, поместив вершину X в ту тройку, где была вершина D. Наконец, если удалить из нового графа вершину X, можно проделать ту же операцию, считая, что из исходного графа удалена вершина D (тогда A, B и C автоматически окажутся в одной тройке). Таким образом, переход индукции доказан.

Отметим, что приведенный в задаче пример – не единственный. Рассуждение из второй части решения по сути показывает, что много различных оптимальных примеров можно построить следующим индуктивным образом. При $k = 1$ возьмем 4 вершины и соединим все пары ребрами. При переходе от k к $k + 1$ добавим три вершины B, C, D, соединим их попарно друг с другом, а также соединим их всех с какой-то уже имеющейся вершиной A.

В таком примере всегда будет $6k$ ребер, и он будет удовлетворять условию задачи.

С.Берлов, Н.Власова

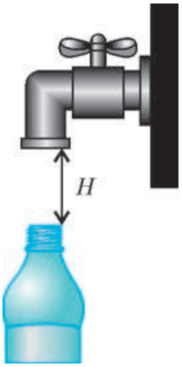
Ф2509. *Открытый без крыши вагон (железнодорожники их называют полувагонами) высотой $H = 4{,}5$ м движется с постоянной скоростью $u = 6$ м/с. Как только вагон проехал мимо грузчика, тот сразу попытался закинуть через заднюю стенку вагона небольшой мешок. Какую минимальную скорость v (в м/с) при этом необходимо сообщить мешку? Известно, что при забрасывании мешка грузчик «отпускает» его на высоте $h = 1$ м от уровня земли. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.*

Вертикальная составляющая искомой скорости должна быть не меньше $v_y = \sqrt{2g(H-h)}$, а горизонтальная – не меньше $v_x = u$. В результате модуль искомой скорости должен быть равен

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{u^2 + 2g(H-h)} =$$
$$= \sqrt{36 + 68{,}6}\ \text{м/с} = 10{,}2\ \text{м/с}.$$

А.Киприянов

Ф2510. *Горлышко бутылки с внутренним диаметром $D = 1$ см находится на расстоянии $H = 10$ см ниже водопроводного крана, внутренний диаметр носика которого $D_0 = 2$ см (см. рисунок). Центры горлышка бутылки и носика крана находятся на одной вертикали. При каком максимальном расходе воды Q_0 (в л/с) вся вода будет попадать в бутылку? Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2. Считать течение воды спокойным (ламинарным). Влиянием воздуха, вытесняемого из бутылки в процессе ее заполнения водой, пренебречь.*



Для скорости воды на уровне горлышка бутылки можно записать

$$v^2 = v_0^2 + 2gH.$$

Условие непрерывности течения (вся вытекшая из крана вода попадает в горлышко бутылки) имеет вид

$$\pi v_0 D_0^2 = \pi v D^2.$$

Отсюда получаем

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gH}{\left(D_0^4/D^4\right) - 1}},$$

и

$$Q_0 = \frac{\pi v_0 D_0^2}{4} =$$
$$= \sqrt{\frac{gH}{8\left(\left(D_0^4/D^4\right) - 1\right)}}\,\pi D_0^2 \approx 0{,}114\ \text{л/с}.$$

Д.Медведев

Ф2511. *Имеются 10 одинаковых флаконов с жидкостью. Они хранятся внутри ящика, из которого тепло наружу не выходит. Для лучшего хранения каждый флакон надо на некоторое время нагреть до температуры +90 °С. Для этого взяли первый флакон и нагрели его до нужной температуры, затратив на это количество теплоты $Q = 30$ кДж. Затем поставили его внутрь ящика и подождали, пока температуры всех флаконов не выровнялись за счет теплообмена. Затем взяли второй флакон и проделали с ним ту же самую процедуру, включая последующее выравнивание температур, и так далее. Какое количество теплоты потребуется для прогрева десятого флакона?*

Поскольку все флаконы одинаковые, то и теплоемкости C у них тоже одинаковые. В первый раз изменение ΔT_1 температуры первого флакона связано с подведенным количеством теплоты соотношением $C\Delta T_1 = Q$. При последующем распределении этой избыточной энергии по всем $N = 10$ флаконам внутри ящика температуры не нагревавшихся флаконов возрастут на $\Delta T_1/N$ градусов. После этого второй флакон достаточно будет подогреть на $\Delta T_1 - \Delta T_1/N = \Delta T(N-1)/N$ градусов, т.е. для этого потребуется $Q_2 = Q(N-1)/N = 27$ кДж тепла. Сама по себе величина конечной температуры не имеет значения, главное, что она для всех одинакова.

Можно заметить, что приведенное рассуждение верно для любой пары соседних флаконов, т.е. отношение изменений температуры и затраченных количеств теплоты равно $(N-1)/N$ не только для второго и первого флаконов, но и для третьего и второго, восьмого и седьмого и т.д. Таким образом, для прогрева десятого флакона надо будет затратить количество теплоты $Q\left((N-1)/N\right)^{N-1}$.

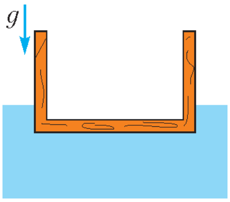
Вычислить значение коэффициента $\left((N-1)/N\right)^{N-1}$ для $N=10$ без калькулятора быстро не получится. Тем не менее, находим $(0{,}9)^9 \approx 0{,}39$, и

$$Q_{10} \approx 11{,}6 \text{ кДж}.$$

Интересно, что даже если флаконов в ящике будет гораздо больше, например $N=100000000$, то отношение Q_N/Q будет примерно таким же – около 0,37. Связано это с тем, что коэффициент $\left(N/(N-1)\right)^N$ при увеличении N будет все ближе и ближе к числу e = 2,7182818284590... ($1/e \approx 0{,}367879441\ldots$).

В.Боровков

Ф2512. *Деревянный сосуд цилиндрической формы (см. рисунок) плавает в воде, погрузившись на 0,2 своей высоты, когда он пустой, и на 0,95 высоты, когда он заполнен водой. Во сколько раз плотность дерева, из которого изготовлен сосуд, меньше плотности воды?*



Обозначим ρ – плотность дерева, ρ_0 – плотность воды, V – внешний объем сосуда, V_1 – его внутренний объем, H, h и h_1 – высота сосуда и глубина его погружения в пустом и наполненном состоянии соответственно. Запишем условие равновесия пустого сосуда:

$$\rho g\left(V-V_1\right)=\rho_0 g V \frac{h}{H},$$

или

$$\rho g V_1 = g V\left(\rho-\rho_0 \frac{h}{H}\right),$$

и условие равновесия наполненного сосуда:

$$\rho g\left(V-V_1\right)+\rho_0 g V_1=\rho_0 g V \frac{h_1}{H},$$

или

$$g\left(\rho-\rho_0\right) V_1 = g V\left(\rho-\rho_0 \frac{h_1}{H}\right).$$

Теперь почленно поделим полученные соотношения друг на друга:

$$\frac{V\left(\rho-\rho_0 \dfrac{h}{H}\right)}{V\left(\rho-\rho_0 \dfrac{h_1}{H}\right)}=\frac{\rho V_1}{\left(\rho-\rho_0\right) V_1},$$

или

$$\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right)\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\frac{h}{H}\right)=\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\frac{h_1}{H}\right).$$

Отсюда находим

$$\frac{\rho_0}{\rho}=\frac{1+\dfrac{h}{H}-\dfrac{h_1}{H}}{\dfrac{h}{H}}=1{,}25.$$

Значит, плотность дерева в 1,25 раза меньше плотности воды.

В.Баткин

Вероятность и последняя цифра произведения

(Начало см. на с. 17)

поэтому вероятность появления каждой из них как последней цифры произведения двух случайных натуральных чисел равна 0,04.

Теперь посмотрим на таблицу возведения в степень (табл.2). Здесь в ячейке, которая находится в строке с цифрой a и столбце с цифрой b, пишем последнюю цифру числа a^b. Нетрудно проверить, что последние цифры степеней данного натурального числа периодичны с периодом 4 (или 2, или 1), т.е. у чисел a^b и a^{b+4} одинаковые последние цифры. Поэтому нам нужны только четыре столбца – для b = = 1, 2, 3, 4. В этой таблице больше всего цифр «1» и «6» – по восемь штук, поэтому вероятность появления каждой из них как последней цифры случайной натуральной степени случайного натурального числа равна $8/40 = 0{,}2$.

Таблица 2

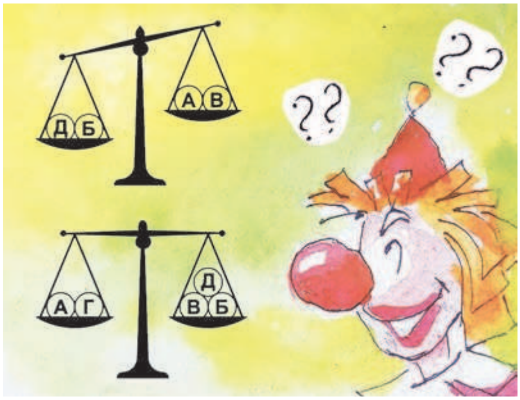
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	4	8	6
3	3	9	7	1
4	4	6	4	6
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	9	3	1
8	8	4	2	6
9	9	1	9	1

Задачи

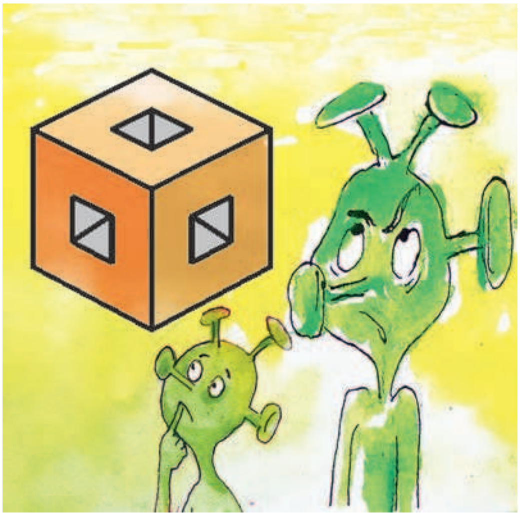
1. На четырех рисунках показана правая рука, а на одном – левая. На каком рисунке показана левая рука?

2. Сколько целых чисел ближе к 15, чем к 20, и ближе к 8, чем к 3?

3. Пять мячей, массы которых 30 г, 50 г, 50 г, 50 г и 80 г, взвесили на чашечных весах (см. рисунок). Какой мяч имеет массу 30 г?



4. Из куба 3×3×3 удалили 7 кубиков 1×1×1 так, что образовались три сквозных ответствия (см. рисунок). Как выглядит сечение этого «дырявого» куба



плоскостью, проходящей через центр куба и перпендикулярной одной из его диагоналей?

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Эти задачи предлагались на Международном математическом конкурсе-игре «Кенгуру» в 2018 году.

Иллюстрации Д.Гришуковой

Где ошибка?

(Логика, комбинаторика, вероятность)

В предлагаемых текстах могут быть ошибки (как в условиях задач, так и в ответах и решениях). Попытайтесь их найти там, где они есть.

Задача 1. *На острове живут рыцари и лжецы. Как-то за круглым столом собралось 12 островитян. Каждый их них сказал: «Оба моих соседа – лжецы». Сколько лжецов было за столом?*

Ответ: 6.

Решение. Все сидящие за столом не могли быть лжецами, так как тогда для каждого из них высказывание было бы верным. Значит, за столом был хотя бы один рыцарь. Его правый сосед – лжец, так как рыцарь сказал правду. Правый сосед лжеца – рыцарь, так как лжец солгал. Правый сосед этого рыцаря – лжец и так далее. Таким образом, рыцари и лжецы сидят через одного, следовательно, лжецов было 6.

Рассуждение выглядит правдоподобным. Ошибок нет?

Задача 2. *Вася и Петя закрашивают по очереди клетки на доске размером 4×4 так, чтобы не образовывался квадрат 2×2 из закрашенных клеток. Тот, кто не сможет сделать очередной ход, проигрывает. Начинает Петя. Кто из них сможет выиграть, как бы ни играл соперник?*

Ответ: Вася.

Решение. Как бы ни играли Вася и Петя, они обязательно сделают в сумме 12 ходов. Тринадцатый ход должен будет сделать Петя, поэтому он проиграет.

А почему обязательно 12 ходов?

Задача 3. *Дана клетчатая доска размером 4×4 с шахматной раскраской. За один шаг можно выбрать на этой доске произвольный квадрат размером 2×2 и изменить цвет каждой его клетки на противоположный. Можно ли за несколько шагов сделать так, чтобы все клетки доски оказались одного цвета?*

Ответ: нельзя.

Решение. Заметим, что при перекрашивании любого квадрата 2×2 в любой строке доски остаются две белые и две черные клетки. Следовательно, все клетки не могут оказаться одного цвета.

Кажется, найден требуемый инвариант. Но не слишком ли просто?

Задача 4. *Рассматриваются «слова» длины 100, составленные только из букв A, B и C. Каких слов больше: тех, в которых каждый из фрагментов AB и AC встречается четное число раз, или тех, в которых каждый из таких фрагментов встречается нечетное число раз?*

Ответ: поровну.

Решение. Рассмотрим слово, в котором оба фрагмента встречаются нечетное число раз. Заменим в нем первый из фрагментов на другой (*AB* на *AC* или наоборот). Получим слово, у которого оба фрагмента встречаются четное число раз. Это соответствие является взаимно однозначным, поэтому слов обоих видов одинаковое количество.

Типичное рассуждение для подобных задач. Интересно, а можно ли было начать рассуждение со слов, в которых оба фрагмента встретятся четное число раз?

Задача 5. *Два приятеля пришли на базар. Веселый молодец продавал 20 котов по цене от 12 до 15 рублей и 20 мешков по цене от 30 копеек до 1 рубля. Докажите, что каждый из друзей может купить по коту в мешке так, чтобы они заплатили одинаковую сумму денег.*

Решение. Заметим, что наименьшая стоимость кота в мешке – 12 рублей 30 копеек, а наибольшая – 16 рублей. Следовательно, количество вариантов возможных стоимостей кота в мешке не превышает количества целых чисел на отрезке $[1230;\ 1600]$, т.е. не больше 371. Вместе с тем, количество различных пар вида «кот–мешок» равно $20\cdot20=400$. Следовательно, по принципу Дирихле найдутся две пары, имеющие одинаковую стоимость.

С принципом Дирихле спорить трудно. А если все-таки попробовать?

Задача 6. *В турнире по круговой системе участвовали 8 шахматистов (каждый участник встретился с каждым один раз). За победу начислялось 1 очко, за ничью – 0,5 очка, за поражение – 0. В результате все участники набрали различное количество очков. Затем часть шахматистов была дисквалифицирована и результаты поедин-*

ков с ними были аннулированы, причем оказалось, что каждый из дисквалифицированных занимал место с четным номером. Среди оставшихся участников порядок занятых мест изменился в точности на противоположный. Сколько человек было дисквалифицировано?

Ответ: 4.

Решение. Докажем, что дисквалифицированных не могло быть меньше четырех. Пусть дисквалифицировано не более трех шахматистов. Разница в сумме набранных очков между участниками, занявшими соседние места, не меньше 0,5. Поэтому до дисквалификации разница между первым и последним участником была не меньше 3,5 очка. Для того чтобы после дисквалификации последний участник опередил первого, первый должен был потерять хотя бы 4 очка. Но он мог потерять очки только за счет дисквалифицированных шахматистов, т.е. не более трех очков.

Таким образом, дисквалифицировано не меньше четырех участников. Но места дисквалифицированных спортсменов – четные, поэтому их и не больше 4. Значит, их ровно 4.

А если дисквалифицирован последний участник?

Задача 7. *Десять школьников по окончании 11 класса решили поступать либо на мехмат, либо на физфак. Некоторые школьники дружат между собой. Каждый понедельник с момента окончания 11 класса они созваниваются с друзьями и обсуждают планы. Если большинство друзей некоторого школьника хотят поступать не туда, куда он, то к следующему понедельнику он принимает мнение этого большинства. Докажите, что до окончания школы их мнения устоятся и больше меняться не будут.*

Решение. Всего в этой группе 45 пар школьников, из них n пар друзей, которые собираются поступать в разные места. Пусть Петя собирается на физфак, k его друзей – на мехмат, а l – на физфак, причем $l < k$. После того, как он переменит мнение, число n уменьшится на k и увеличится на l. Таким образом, после каждой перемены мнений число n уменьшится на $k - l > 0$ пар. Ясно, что это может происходить не более 45 раз. Значит, за год (52 недели) процесс перемены мнений завершится.

Задача 8. *В парламенте каждый депутат имеет не более трех врагов. Докажите, что парламент можно разделить на две палаты так, что у каждого депутата будет не более одного врага внутри палаты.*

Решение. Поместим всех депутатов в зал. Выберем одного депутата и отправим его в палату A. Затем выберем в зале такого депутата, у которого нет врагов в A (если такой есть), и также отправим его в A. Будем повторять эту процедуру до тех пор, пока в зале будут оставаться такие депутаты. Когда они закончатся, выберем в зале такого депутата, который имеет в палате A ровно одного врага, и отправим его в A. Проделаем так несколько раз, пока и такие депутаты не закончатся. Тогда возьмем в зале таких депутатов, у которых три врага в палате A, и всех их отведем в палату B. Они не враждуют между собой, так что все будет корректно. В зале останутся депутаты, у которых ровно два врага в палате A, но тогда у них не более одного врага среди депутатов из палаты B и тех депутатов, кто пока остался в зале, стало быть, всех их можно отправить в палату B. Задача решена.

Процесс распределения депутатов построен, но все ли шаги корректны?

Задача 9. *Сколькими способами можно выбрать из полной колоды (52 карты) 10 карт так, чтобы среди них был хотя бы один туз?*

Ответ: $4C_{51}^9$.

Решение. Поскольку требуется туз, то сначала выберем его; это можно сделать четырьмя способами. Затем достаточно выбрать произвольные 9 карт из 51. Количество способов, которыми это можно сделать, равно C_{51}^9. Так как оба выбора происходят независимо, то искомое количество способов равно $4C_{51}^9$.

А если поменять порядок рассуждений: сначала выбирать девять карт, а потом добавлять туза, то получится тот же ответ?

Задача 10. *Встретились двое. Один говорит: «У меня двое детей. Среди них есть мальчик». С какой вероятностью оба ребенка мальчики?*

Ответ: $1/2$.

Решение. По условию задачи, один из детей – мальчик. Второй может быть как мальчиком, так и девочкой с одинаковой вероятностью. Поэтому оба ребенка – мальчики с вероятностью 1/2.

Интересно, а если переформулировать задачу так: «Встретились двое. Один говорит: “У меня двое детей. Старший – мальчик”. С какой вероятностью оба ребенка мальчики?» В этом случае ответ изменится?

Задача 11. *Четыре человека А, Б, В, Г становятся в очередь в случайном порядке. Найдите вероятность того, что А стоит первым, если известно, что Б стоит в очереди позже А.*

Ответ: 1/3.

Решение. *Б* стоит позже *А* в стольких же случаях, в скольких и *А* стоит позже *Б*, т.е. все 24 способа выстроить в ряд четырех человек разбиваются на две равные группы по 12 – в половине из них *А* стоит раньше *Б*, в половине *Б* стоит раньше *А*. Условная вероятность того, что *А* стоит первым при заданном условии, равна доле тех случаев, когда *А* – первый, среди тех 12 случаев, когда *А* стоит раньше *Б*. Но, кроме *Б*, у нас есть 3 человека – *А*, *В* и *Г*, и каждый из них может быть первым с равной вероятностью. Таким образом, доли случаев, когда первый – *А*, когда первый – *В* и когда первый – *Г*, равны, поэтому искомая вероятность равна 1/3.

Не стоит ли на всякий случай проверить ответ, расписав все возможные варианты расстановки?

Задача 12. *Два артиллериста стреляют по воробью. Один попадает с вероятностью 0,2, другой – с вероятностью 0,6. В результате залпа из двух пушек в цель попал только один снаряд. Какова вероятность того, что промахнулся первый артиллерист?*

Ответ: 2/3.

Решение. Первый артиллерист промахивается с вероятностью 0,8, а второй – с вероятностью 0,4. Поэтому вероятность промаха первого в два раза выше, чем вероятность промаха второго. Поскольку в цель попал только один снаряд, то сумма вероятностей промахов первого и второго равна 1. Следовательно, первый промахнулся с вероятностью 2/3.

Представляется, что логика этого решения безупречна. А вы как думаете?

Статья написана по материалам Творческих конкурсов учителей математики, Московских математических регат и олимпиад

Публикацию подготовил А. Блинков

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

Итоги конкурса 2017/18 учебного года

Лучших результатов добились школьники:

Бирюлин Алексей – Москва, Курчатовская школа, 5 кл.,

Дренчева Мария – Болгария, София, Софийская математическая гимназия, 6 кл.

и команда математической группы Центра «Успех» Гатчинского муниципального района Ленинградской области (руководитель Павлов Сергей Павлович):

Забиякин Сергей – Гатчина, школа 9, 10 кл.,
Лукашов Никита – Сиверская гимназия Гатчинского района, 10 кл.,
Тюков Даниил – Пригородная школа Гатчинского района, 7 кл.,
Ушков Даниил – Сиверская гимназия Гатчинского района, 10 кл.,
Кашенко Юлия – Гатчина, лицей 3, 8 кл.,
Кудяков Макар – Гатчина, лицей 3, 7 кл.,
Ломакин Артемий – Гатчина, лицей 3, 10 кл.,
Сычикова Мария – Сиверская гимназия Гатчинского района, 10 кл.,
Федорова Алина – Гатчина, лицей 3, 7 кл.

Жюри конкурса также отмечает хорошие работы следующих школьников:

Коноплев Максим – Москва, школа 1329, 7 кл.,
Линник Елена – Украина, Харьков, ХУВК 45 «Академическая гимназия», 9 кл.,
Павлова Деница – Болгария, София, Софийская математическая гимназия, 10 кл.,
Соколова Вероника – Хабаровск, школа 15 имени Пяти Героев Советского Союза, 8 кл.

Поздравляем!

Победителям и призерам высланы дипломы журнала «Квант» и призы от издательства МЦНМО.

Через тернии к звездам (Per aspera ad astra)

А.СТАСЕНКО

Человечество покинет Землю менее чем через 600 лет.... У нас заканчивается пространство для жизни, и единственный выход из этой ситуации – колонизация других миров. Пришло время исследовать другие звездные системы...

С.Хокинг

А КУДА ДЕВАТЬСЯ? КОНЕЧНО, К НОВЫМ звездам! Ведь до ближайшей звезды, можно сказать, рукой подать (по галактическим масштабам): всего лишь каких-то четыре с небольшим световых года. Поэтому она так и называется – Проксима (от лат. proxima – ближайшая) и относится к звездой системе Альфа Центавра. Кстати, как говорят астрономы, около этой звезды вращается очень подходящая планета массой в 1,3 массы Земли.

Но прежде всего нужно преодолеть притяжение нашего Солнца, иначе говоря, выбраться из его потенциальной ямы (см. рисунок). И тут на помощь может прийти само Солнце – точнее, идущие от него потоки квантов света и частиц (солнечный ветер).

О том, что свет оказывает на тела давление, заявлял еще И.Кеплер (1604 г.), объясняя отклонение хвостов комет в сторону от Солнца. Дж.Максвелл теоретически доказал (1873 г.) наличие этого давления на основе своих уравнений электромагнитного поля. П.Н.Лебедев экспериментально подтвердил (1899 г.) реальность светового давлении на тела, после чего лорд Кельвин (он же У.Томсон) признался, что он всю жизнь воевал с Дж.Максвеллом из-за его светового давления, но Лебедев заставил его признать свою неправоту. Наконец, Ф.А.Цандер уже с инженерно-практической точки зрения рассматривал (1924 г.) возможность использования солнечного паруса для полета на Марс. А совсем недавно и физики-теоретики, и предприниматели-миллиардеры разработали конкретные проекты межзвездных кораблей с солнечным парусом. Самый скромный из них должен доставить к системе Альфа Центавра наногруз при помощи паруса площадью всего 16 $м^2$. А наиболее грандиозный должен иметь площадь 10^5 $м^2$ (полтора десятка футбольных полей!), причем в течение 100 (ста!) лет достичь максимальной скорости (0,05–0,1 скорости света), затем 50 лет обеспечивать торможение по мере приближения к желанной звезде. И столько же времени потребуется на возвращение... Но когда это будет? Прагматики из NASA предполагают осуществление такого проекта через полвека, в 2069 году. Но нам уже сейчас ничто не мешает проделать некоторые оценки параметров будущего полета с солнечным парусом.

Почему именно с парусом? Да потому, что это самый «бесплатный» вид тяги, не требующий сложного оборудования. Конечно, при помощи солнечного излучения невозможно взлететь с Земли, так что необходим предварительный вывод летательного аппарата на орбиту при помощи более мощных средств.

Итак, пусть летательный аппарат, движущийся вокруг Солнца по круговой орбите радиусом r_0, развернул парус площадью S, ориентированный перпендикулярно лучам света. Согласно одному из законов небесной механики, а именно второму закону Кеплера, моменты импульса тела в поле тяготения, или площади, заметаемые радиусом-вектором тела в равные промежутки времени, остаются постоянными (см. два заштрихованных сектора на рисунке). Это значит, что в любой точке траектории нашего паруса

$$ur = u_0 r_0,$$

где u – окружная (линейная) компонента скорости. Напомним, что вектор скорости имеет окружную u и радиальную v компоненты. С момента раскрытия паруса кинетическая энергия будет увеличиваться за счет работы силы давления излучения Солнца. Найдем эту работу.

Каждый квант частотой ν, как известно, имеет импульс $\frac{h\nu}{c}$ (где – h постоянная

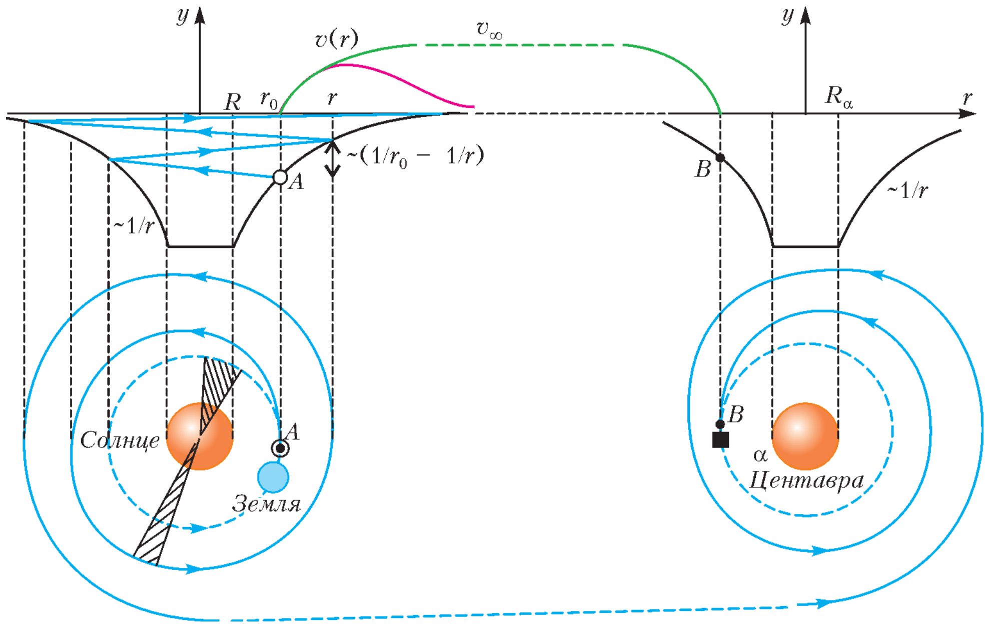


Схема перелета с околосолнечной орбиты, из точки А, на орбиту вокруг другой звезды, в точку В (черный квадрат — планета-спутник звезды, сюда еще надо «приземлиться», но это не цель данной статьи). В нижней части рисунка — вид на траекторию полета «сверху»; в верхней части рисунка слева — вид «сбоку» на траекторию аппарата, выбирающегося из потенциальной ямы; зеленая кривая — траектория полета к звезде; красная кривая — зависимость радиальной компоненты скорости v, соответствующая предельному случаю убегания (когда $v_\infty \to 0$). Обозначения: R — радиус Солнца, R_α — радиус желанной звезды, r — расстояния от их центров, r_0 — радиус начальной круговой орбиты аппарата, $1/r$ — сечение потенциальной ямы

Планка, c – скорость света). Следовательно, если поток энергии на один квадратный метр равен $q(r)$ $\left(\left[q(r)\right] = \text{Дж}\big/\left(\text{м}^2\cdot\text{с}\right)\right)$, то поток импульса (давление) равен $\dfrac{q(r)}{c}$. А если все кванты отражаются зеркально от площади S, то действующая на нее сила равна

$$\frac{2q(r)S}{c}.$$

Далее, если на первоначальной круговой орбите вокруг Солнца (орбита Земли) радиусом r_0 плотность потока его излучения равна q_0, то на расстоянии r имеем

$$q(r) = q_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^2.$$

Заметим, что эта зависимость от радиуса точно такая же, как и для силы тяготения, действующей на единичную массу:

$$\frac{F}{m} = -\frac{GM}{r^2} = -\frac{GM}{r_0^2}\left(\frac{r_0}{r}\right)^2,$$

где M – масса звезды, G – постоянная тяготения. А работа силы тяготения при переходе из точки r_0 в точку r равна разности потенциалов, т.е. значений потенциальной энергии в расчете на единицу массы перемещаемого тела:

$$GM\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) = \frac{GM}{r_0}\left(1 - \frac{r_0}{r}\right).$$

Значит, работа силы давления излучения будет равна

$$\frac{2q_0r_0S}{cm}\left(1 - \frac{r_0}{r}\right).$$

Теперь мы можем записать важную мысль: изменение суммы потенциальной и кинетической энергий единицы массы аппарата равно работе сил давления света на парус при перемещении от r_0 до r:

$$\frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} - \frac{u_0^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} + \frac{GM}{r_0}\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \approx$$

$$\approx \frac{2q_0r_0S}{cm}\left(1 - \frac{r_0}{r}\right).$$

Используя соотношение между окружными скоростями, запишем азимутальную часть кинетической энергии в виде

$$\frac{u^2}{2} = \frac{u_0^2}{2}\left(\frac{r_0}{r}\right)^2,$$

а начальную орбитальную скорость на круговой орбите вокруг Солнца найдем из второго закона Ньютона

$$\frac{u_0^2}{r_0} = \frac{GM}{r_0^2}.$$

В результате для радиальной компоненты скорости получим

$$v^2 - v_0^2 = -\frac{GM}{r_0}\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^2 + \frac{Q}{\pi c r_0}\frac{S}{m}\left(1 - \frac{r_0}{r}\right).$$

Здесь введена мощность излучения звезды $Q = 4\pi r_0^2 q_0$. Видно, что достаточно далеко от звезды (при $\frac{r}{r_0} \to \infty$) получим значение скорости, которое удалось бы достичь при помощи паруса:

$$v_\infty^2 = v_0^2 - \frac{GM}{r_0} + \frac{Q}{\pi c r_0}\frac{S}{m}.$$

При этом предполагается, что плоскость начальной круговой орбиты содержит прямую, проходящую через центры Солнца и желанной звезды.

Пусть начальная радиальная скорость аппарата равна нулю ($v_0 = 0$) – он вращается по круговой орбите и никто не подталкивает его в радиальном направлении, кроме развернувшегося паруса. Тогда из последнего равенства можно получить интересный результат – предельное значение поверхностной плотности массы паруса $\frac{m}{S}$, при котором излучение поможет едва выбраться из потенциальной ямы звезды, так что аппарат остановится на бесконечности ($v_\infty = 0$):

$$\left(\frac{m}{S}\right)_{\max} = \frac{Q}{M}\frac{1}{\pi c G}.$$

Видно, что сюда вошли две фундаментальные константы – скорость света c и гравитационная постоянная G, а также единственная характеристика звезды, описывающая поток квантов, – ее удельная мощность излучения $\frac{Q}{M}$ ($\left[\frac{Q}{M}\right] = $ Вт/кг). И, конечно, вездесущее число π: ведь и звезды, и орбита – «круглые». А если учесть, что для звезд типа Солнца $Q \sim M^4$, последнее выражение можно еще упростить:

$$\left(\frac{m}{S}\right)_{\text{макс}} \sim M^3.$$

Тут пора сделать численные оценки. Согласно табличным данным, масса Солнца $M = 2 \cdot 10^{30}$ кг, расстояние от Солнца до Земли $r_0 = 150$ млн км, плотность потока излучения на орбите Земли $q_0 = 1400$ Вт/м^2, гравитационная постоянная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2, скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. В результате получим

$$\left(\frac{m}{S}\right)_{\max} \approx 10^{-3}\ \text{кг/м}^2.$$

Более тяжелый парус не «выберется» из сферы влияния Солнца. А ведь этот парус должен нести не только себя, но еще и некий полезный груз. Поэтому предлагается подталкивать корабль мощным электромагнитным излучением (например, лазером) с Земли. А по мере удаления от Солнца – использовать специально расположенные заранее зеркала, подсвечивающие пролетающий мимо межзвездный аппарат отраженным солнечным светом. А еще…

И тут, как и во всех великих проектах, возникают дополнительные соображения. Помимо рассмотренного выше электромагнитного излучения, существует корпускулярное излучение Солнца – поток протонов со скоростью около 450 км/с, оказывающих давление $p_0 \sim 2 \cdot 10^{-7} \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)^2$. Причем в период активного Солнца интенсивность корпускулярного излучения может возрасти на два-три порядка. Конечно, эти частицы тоже будут давать вклад в тягу паруса. Но как они будут взаимодействовать с его тонкой пленкой? Не превратят ли они ее в сито, паутину и, в конечном счете, в космическую пыль…

Далее, проблема еще в том, что обсуждаемая здесь цель полета не находится в плоскости эклиптики, и это потребует дополнительных маневров. А по поводу рассматриваемой теории великий Галилей непременно постарался бы внести принципиальное «уточнение»: если свет, распространяющийся со скоростью c, падает на парус, уже обладающий радиальной скоростью v, то их относительная скорость должна быть меньше c. Однако современная физика утверждает, что скорость света в любой системе координат равна *c*. Что же изменится в сравнении со случаем паруса на круговой орбите? Может изменится частота фотона, а значит, и его энергия и импульс – фотон «покраснеет» с удалением от гравитирующего его источника?

А поэты…чтó им ближайшая Проксима:

«Живет она, дошедшая от дедов,
Особая сжигающая страсть:
Влечет к себе туманность Андромеды
Сквозь немоту космических пространств».

(Наталья Образцова)

Но до Андромеды полтора миллиона световых лет! Здесь и субсветовые скорости аппарата маловаты: свет Андромеды, дошедший сейчас до нас, покинул ее, когда на Земле еще не было человечества. Но тут забрезжила надежда: астрофизики открыли в Пространстве «кротовые норы», через которые …

А чтобы во всем этом разобраться, нужно поступить на Физтех или в МГУ и окончить их физические факультеты.

НАШИ НАБЛЮДЕНИЯ

Гидроудар у нас дома

Ю.НОСОВ

ГОТОВЯСЬ К ЗАВТРАКУ, Я ВЫНУЛ ИЗ ХОЛОдильника стеклянную банку консервов «Помидорчики в собственном соку» и понес ее к столу. Банка была почти полной – открыта накануне. Крышка чуть-чуть прикрывала банку без какого-либо уплотняющего поворота. Я держал банку за верхний край, но она, к моему ужасу, выскользнула из рук и упала. Банка стукнулась о ламинатный пол, но не разбилась, а все содержимое ее разлилось тут же. Что оставалось делать? Быстро, пока моя семья не пришла в кухню, я стал собирать с пола остатки «помидорчиков в собственном соку». Почти закончив работу, я с удовольствием посмотрел на чистый пол, НО! Подняв глаза вверх, я увидел страшную картину: белые стены кухни и потолок были забрызганы томатным соком и даже моя одежда, включая рубашку, была вся в красных пятнах.

Почему же томатный сок, падая в банке с высоты не более 1,2–1,3 метра, после удара о пол взлетел до высоты 2,5 метра ?

Оказывается, в данном случае мы имеем дело с гидроударом. Гидравлическим ударом (гидроударом) называют скачок давления в какой-либо системе, заполненной жидкостью, вызванный быстрым изменением скорости потока этой жидкости. Количественно решить предложенную задачу нам вряд ли удастся. Однако качественные рассуждения привести можно.

В нашем «опыте» сок в банке – это та жидкость, движение которой мгновенно останавливается при ударе банки о пол. Столкнувшись с преградой, поток жидкости по инерции продолжает течение с той скоростью, с которой двигался до появления преграды. Контактирующие с препятствием первые слои жидкости с той же скоростью уплотняются за счет поступления следующих слоев. Из-за постоянного нагнетания новых слоев потока давление жидкости стремительно возрастает (происходит гидроудар), и жидкость «ищет» способ это давление уменьшить.

Итоговый результат для нас – резкое повышение давления в жидкости в момент удара приводит к взрывному выбросу содержимого банки.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №5)

1. 19 февраля.

За месяц, в котором у барана день рождения, не считая первый день, баран выучил 1100 – 820 = = 280 языков. В месяце может быть 28, 29, 30 или 31 день. Значит, в месяце без одного дня: 27, 28, 29 или 30 дней. Так как каждый день баран учит одинаковое количество языков, то 280 должно делиться на это количество дней без остатка. Этому условию удовлетворяет только число 28, значит, за один день баран учит 280 : 28 = 10 языков. Со второго дня месяца до дня рождения баран выучил 1000 – 820 = 180 языков. Следовательно, прошло 18 дней, т.е. день рождения у барана – 19 февраля.

2. У третьего мудреца.

У первого мудреца старшая карта – валет, значит, у него ровно две карты младше валета, т.е. две карты из набора 6, 7, 8, 9, 10. Для того чтобы второй мудрец мог наверняка знать карты каждого, у него должны быть три остальные карты из этого набора (иначе он не смог бы однозначно определить карты первого мудреца). Тогда дама, король и туз должны оказаться у третьего мудреца.

3. 150 сольдо.

Будем условно считать 10 августа первым днем недели, 11 августа – вторым, ..., 16 августа – седьмым. Пусть в первый день недели обед стоит a_1 сольдо, во второй – a_2 сольдо, ..., в седьмой день – a_7 сольдо. Стоимость всех обедов за неделю обозначим $P = a_1 + a_2 + \ldots + a_7$.

Аня обедала 10 дней подряд, начиная с первого дня недели, значит, $P + a_1 + a_2 + a_3 = 70$. Ваня обедал 12 дней подряд с третьего дня недели: $P + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 2P - a_1 - a_2 = 70$. Таня обедала 20 дней подряд, начиная с четвертого дня недели: $3P - a_3 = 100$. Сложив эти три равенства, получим $3P + a_3 + 3P - a_3 = 240$. Значит, $P = 40$. Подставив значение P в первое равенство, получим $a_1 + a_2 + a_3 = 70 - 40 = 30$. Тогда стоимость 24 обедов, начиная с первого дня недели, равна $3P + a_1 + a_2 + a_3 = 150$.

4. В три цвета.

Оценка. Рассмотрим числа 4, 6 и 8. Каждые два из них должны быть покрашены в разные цвета, поэтому цветов не может быть меньше трех.

Пример. *Первый способ*. Будем последовательно красить натуральные числа по возрастанию. Числа 1 и 2 покрасим двумя разными цветами. Для цвета каждого числа k, большего 2, есть не более двух ограничений: оно не может быть одного цвета ни с числом $\frac{k}{2}$, ни с числом $k - 2$. Поэтому для любого такого k обязательно найдется третий цвет.

Второй способ. Покрасим все числа в два цвета с соблюдением только первого условия. Например, все числа, дающие остаток 0 или 1 при делении на 4, – в красный цвет, а остальные числа – в синий цвет. Теперь надо добиться выполнения первого условия. Для этого перекрасим в фиолетовый цвет все числа, в разложении которых на простые множители число 2 входит в нечетной степени. Тогда первое условие, очевидно, не нарушится, а второе также будет выполнено, поскольку числа, различающиеся в два раза, имеют в разложении на простые множители разную четность показателя степени двойки.

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

(см. «Квант» №4)

29. Нет.

По условию, в Шиловске цена шила – 99/100 его цены в Мыловске, а цена мыла – 101/100 его цены в Мыловске. Значит, купив шило в Шиловске на x рублей, мы выручим за него в Мыловске $100x/99$ рублей, т.е. прибыль составит $x/99$ рублей. Аналогично, купив мыло в Мыловске на x рублей, мы выручим за него $101x/100$ рублей, т.е. прибыль составит $x/100$ рублей. Таким образом, прибыль не превышает $x/99$ рублей, где x – количество затраченных рублей.

Докажем, что перед очередным переездом у нас всегда не более 100000 рублей.

Изначально это так. Предположим, что на каком-то шаге у нас не более 100000 рублей, и теперь докажем, что на следующем шаге снова будет не более 100000 рублей.

Поскольку на следующий переезд надо оставить 1000 рублей, мы не можем закупить товара больше чем на 99000 рублей. А прибыль от продажи составит не более 1/99 потраченного, т.е. не более 1000 рублей. Тогда у нас снова не более 100000 рублей, что и требовалось доказать.

Таким образом, перед любым переездом всегда не более 100000 рублей. А если мы прекратим переезды, то лишимся возможности зарабатывать.

30. Пусть в полученном многограннике B вершин и P ребер. Заметим, что из каждой его вершины выходят 3 ребра – два новых маленьких и кусочек старого. Умножим число вершин на 3: тогда мы посчитаем все ребра, причем каждое ребро – по два раза (ведь у ребра две концевые вершины). Значит, $3B = 2P$. Но тогда B делится на 3, а P – на 2, что и требовалось.

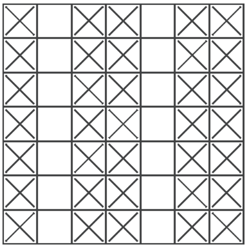


Рис. 1

31. а) Нельзя.

Отметим клетки столбцов 1, 3, 4, 6, 7 (рис.1). В любой фигуре «Т» будет четное количество отмеченных клеток. Таким образом, с каждым действием четное количество отмеченных клеток будет менять цвет, значит, четность количества белых клеток среди отмеченных меняться не будет. Изначально оно равно 0, а должно стать равно 35. Эти числа разной четности, значит, перекрасить доску невозможно.

Подробнее с такой идеей решения задач можно ознакомиться в статьях Ю.Ионина, Л.Курляндчика «Поиск инварианта» («Квант» №2 за 1976 г.) и Е.Бакаева «Переключения рядов» («Квант» №3 за 2017 г.).

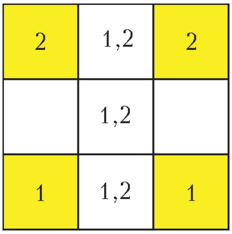


Рис. 2

б) Можно.

Покажем, как перекрасить четыре угловые клетки квадрата 3×3. Для этого перекрасим две фигуры «Т», расположенные внутри этого квадрата, как на рисунке 2 (цифры 1 написаны в клетках одной фигуры, цифры 2 – в клетках другой).

Доску 8×8 можно разбить на такие четверки клеток. Разобьем ее на четыре квадрата 4×4, а каждый из них можно разбить на четверки клеток, как показано на рисунке 3. Перекрасив все четверки клеток, из полностью черной доски получим белую.

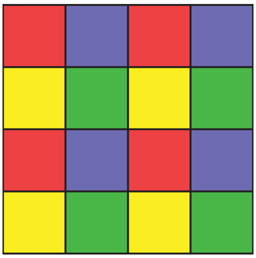


Рис. 3

32. Способ разрезания представлен на рисунке 4.

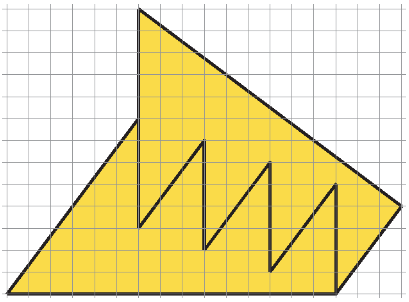


Рис. 4

Покажем, что эти фигуры равны. Разрежем каждую из них на 4 синих и 1 зеленый треугольник (рис.5). Гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4 равна $\sqrt{3^2+4^2}=5$ (по теореме Пифагора), одной чертой на рисунке отмечены отрезки этой длины. Гипотенузы треугольников с катетами 1 и 3 равны, они отмечены двумя чертами. Гипотенуза треугольника с катетами 9 и 12 равна $\sqrt{9^2+12^2}=\sqrt{3^2\left(3^2+4^2\right)}=15$, тремя чертами отмечены отрезки этой длины.

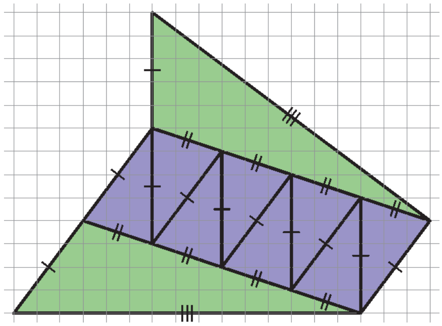


Рис. 5

Синие треугольники равны друг другу и зеленые треугольники равны друг другу (по трем сторонам). Видно, что синие треугольники одинаковым образом выстроены на сторонах зеленых треугольников. Поэтому образованные ими фигуры равны.

ГДЕ ОШИБКА?

В каждом из предложенных текстов есть ошибки.

1. Первые два предложения в приведенном решении ошибок не содержат. Но соседями любого лжеца могут являться не только два рыцаря (как указано в решении), а также рыцарь и лжец. Заметим, что никакие два рыцаря не могут быть соседями, значит, рыцарей не больше шести, т.е. лжецов – не меньше шести. Кроме того, в каждой тройке сидящих подряд есть хотя бы один рыцарь, поэтому рыцарей не меньше четырех, т.е. лжецов – не больше восьми.

Примеры возможной рассадки для восьми и семи лжецов показаны на рисунке 6 (пример для

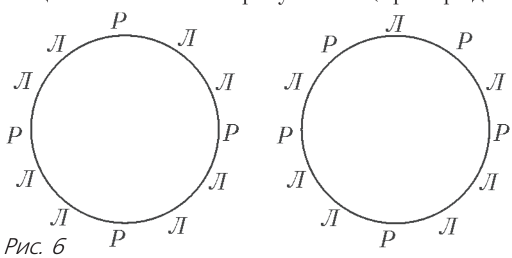


Рис. 6

шести лжецов приведен в решении). Таким образом, правильный ответ: лжецов могло быть 6, 7 или 8.

2. Приведенный ответ верный, а решение неверное. Действительно, игра может закончиться раньше, например после одиннадцатого хода (рис.7).

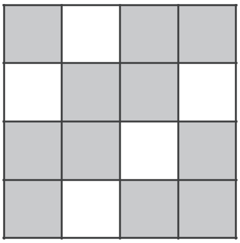


Рис. 7

Верная стратегия: разобьем доску пополам, например горизонтальной прямой. На любой ход Пети Вася закрашивает ту клетку на другой половине доски, которая получается из данной параллельным переносом на 2 клетки вниз или вверх. Предлагаем читателю убедиться, что при такой стратегии тринадцатым ходом Петя неизбежно проиграет.

3. Условие задачи корректно, а ответ и решение неверные. Утверждение, сформулированное в решении, верно только для первого шага, а для дальнейших шагов это не так. Например, за два шага можно изменить количество черных и белых клеток во второй горизонтали (рис.8,*а*).

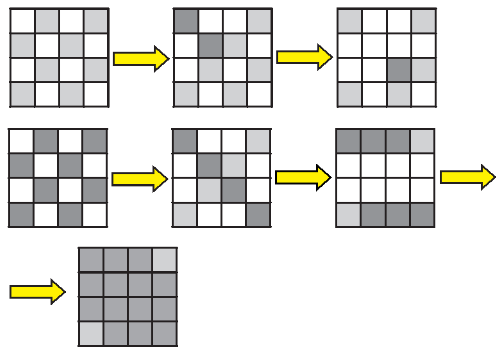


Рис. 8

Приведем одну из возможных последовательностей шагов, обеспечивающих требуемую раскраску (рис.8,*б*):

1) перекрасим левый верхний и правый нижний квадраты (в любом порядке);

2) перекрасим два квадрата на центральных вертикалях;

3) перекрасим два квадрата на центральных горизонталях.

4. Ни ответ, ни решение верными не являются. Ошибка состоит в том, что соответствие между словами, в которых указанные фрагменты встречаются четное число раз, и словами, в которых они встречаются нечетное число раз, не является взаимно однозначным. Действительно, в решении указано, что каждому «нечетному слову» соответствует ровно одно «четное», причем различным соответствуют различные. Но имеются «четные слова», которые не соответствуют никаким «нечетным», например слова, в которых отсутствует буква A. Следовательно, слов, в которых указанные фрагменты встречаются четное число раз, больше.

5. Условие задачи некорректно, т.е. утверждение, которое предлагается доказать, неверно! Действительно, пусть все коты стоили одинаково, а стоимости мешков различны, тогда стоимости любого кота в мешке также будут различными. Для того чтобы утверждение задачи выполнялось (и приведенное решение стало верным), нужно добавить условие, что цены всех котов и цены всех мешков попарно различны.

6. Действительно, в приведенном решении допущена ошибка: последний участник мог оказаться дисквалифицированным. В этом случае опередить первого должен седьмой участник. Так как изначальная разница в очках между ними составляла 3 очка, то указанное в решении противоречие сохраняется, и эта ошибка не повлияла на полученный ответ.

Но оказывается, ситуация, описываемая в условии задачи, невозможна, т.е. условие задачи некорректно. Предположим, что было дисквалифицировано 4 человека, и приведем это предположение к противоречию.

Участник, оказавшийся последним после проведенной дисквалификации, не мог набрать во встречах между четырьмя оставшимися после дисквалификации участниками больше чем 0,5 очка. Действительно, если бы он набрал хотя бы очко, то трое остальных должны были бы набрать, как минимум, 1,5, 2 и 2,5 очка соответственно. Но тогда общая сумма набранных очков – не менее семи, а в турнире из четырех участников разыгрывается всего 6 очков.

Если же этот участник набрал не более 0,5 очка, то до дисквалификации у него было не более 4,5 очков. В этом случае он никак не мог быть первым. Иначе остальные 7 шахматистов могли бы набрать не более чем 4, 3,5, 3, 2,5, 2, 1,5 и 1 очко соответственно, т.е. общая сумма набранных очков не превышала бы 22 очка, в то время как в турнире из восьми человек разыгрывается 28 очков.

7. Утверждение, которое предлагается доказать в условии задачи, неверно. (Снова некорректное условие!) Приведем контрпример. Пусть в этой группе учатся девочки и мальчики. Каждая из девочек дружит с каждым мальчиком, а однополых пар друзей нет. По окончании 11 класса все девочки решили поступать на мехмат, а все мальчики – на физфак. В таком случае мнения всех школьников будут меняться еженедельно и не устоятся никогда.

Условие задачи станет корректным, если к понедельнику будет менять мнение только один школьник: любой из тех, чьи планы отличались от планов большинства друзей. Соответственно станет верным и приведенное решение.

Неверное утверждение «доказано» в результате следующей ошибки. В высказывании «После того, как он переменит мнение, число n уменьшится на k и увеличится на l» не учитывается, что вместе с Петей мнение могут переменить и некоторые его друзья. Даже если учитывать только пары с участием Пети, после очередной перемены мнений число n не обязательно уменьшится на $k-l$. А если говорить обо всех парах друзей, то вообще странно ожидать, что изменение числа n зависит только от планов Пети и его друзей.

В исправленном виде задача неоднократно использовалась в различных формулировках. Первоисточником, видимо, является задача А.Штейнберга, опубликованная под номером М277 в «Задачнике «Кванта» (№8 за 1974 г.) в такой формулировке:

Задано несколько красных и несколько синих точек. Некоторые из них соединены отрезками. Назовем точку «особой», если более половины из соединенных с ней точек имеют цвет, отличный от ее цвета. Если есть хотя бы одна особая точка, то выбираем любую особую точку и перекрашиваем ее в другой цвет. Докажите, что через конечное число шагов не останется ни одной особой точки.

8. Утверждение задачи справедливо, но предложенное доказательство неверно. В самом деле, рассмотрим момент, когда мы впервые отправляем в палату A такого депутата, допустим, депутата D_1, который имеет в A ровно одного врага, скажем депутата D_2. Когда мы в следующий раз отправим в палату A депутата D_3, имеющего в палате ровно одного врага, этим врагом может снова оказаться депутат D_2, и теперь у D_2 в палате A будет два врага – D_1 и D_3, что противоречит требованию задачи.

Приведем возможное верное решение. Разделим депутатов на две палаты произвольно. Если в одной из палат есть депутат, имеющий в ней двух или трех врагов, переведем его в другую палату. Так будем делать до тех пор, пока такие депутаты имеются. Как только их не станет, задача будет решена. Осталось показать, что это рано или поздно произойдет. В самом деле, после каждого перехода количество пар депутатов, находящихся в разных палатах и враждующих между собой, увеличивается. Это происходит потому, что добавляются по крайней мере две такие пары, а исчезает не более одной. Но количество таких пар неограниченно возрастать не может (общее количество вообще всех враждующих пар не превосходит $\frac{3N}{2}$, где N – количество депутатов), поэтому обязательно наступит момент, когда из палаты в палату некого будет переводить.

9. Приведенное рассуждение неверно, из-за чего получен и неверный ответ. Ошибка состоит в том, что некоторые случаи подсчитаны несколько раз (причем не одинаковое количество раз, поэтому верный ответ невозможно получить, разделив полученный результат на фиксированное число). В частности, в приведенном подсчете дважды учтены такие случаи: 1) отдельно выбран туз пик, а среди девяти других карт есть ровно один туз – туз треф; 2) отдельно выбран туз треф, а среди девяти других карт есть ровно один туз – туз пик.

Есть и случаи, подсчитанные трижды. Например, пусть среди выбранных десяти карт оказались три туза разных мастей и еще 7 каких-то карт. Этот набор, исходя из приведенного рассуждения, можно было получить тремя способами: сначала выбирая один из тузов, а затем дополнять его еще девятью картами. Получается, что один конкретный набор подсчитан три раза как разный.

Возможны два пути рассуждения, приводящие к верному ответу, который будет записан по-разному.

Первый путь. Отдельно подсчитаем количество способов выбрать ровно один туз, ровно 2 туза, ровно 3 туза и ровно 4 туза. Один туз можно выбрать C_4^1 способами, а еще 9 карт, среди которых нет тузов, – C_{48}^9 способами. Аналогично, два туза можно выбрать C_4^2 способами, а добавить к ним 8 карт без тузов – C_{48}^8 способами. Три туза выбираются C_4^3 способами, а дополняются семью картами C_{48}^7 способами, а четыре туза – C_4^4 способами и дополняются C_{48}^6 способами. Используя правила умножения и сложения, получим ответ: $C_4^1C_{48}^9+C_4^2C_{48}^8+C_4^3C_{48}^7+$ $+C_4^4C_{48}^6$.

Второй путь. Количество способов выбрать любые 10 карт из 52 равно C_{52}^{10}, а количество способов выбрать 10 карт, среди которых нет тузов, равно C_{48}^{10} (для этого подсчета достаточно «вынуть» тузы из колоды). Следовательно, искомое количество способов равно $C_{52}^{10}-C_{48}^{10}$.

10. Пусть в семье двое детей, про пол которых ничего не сказано. Этой ситуации соответствует пространство из четырех элементарных событий: ММ, МД, ДМ, ДД. Решая задачу во второй формулировке, можно сразу рассматривать только два равновероятных события: ММ и МД. Или, как указано в решении, М и Д. Поэтому решение и ответ будут верными именно для такой формулировки.

А для исходной формулировки неверны ни решение, ни ответ. В этом случае роли детей не разделены, поэтому из указанных четырех элементарных событий любое из трех событий ММ, МД или ДМ может реализоваться с равной вероятностью. Поэтому вероятность того, что оба ребенка – мальчики, равна $1/3$.

11. Если даже не выписывать все варианты, то легко понять, что общее количество вариантов расстановки равно $4! = 24$. Из них *А* стоит первым в $3! = 6$ случаях. Вариантов, когда *Б* стоит позже *А*, 12, и все случаи, где *А* стоит первым, – среди них. Поэтому искомая вероятность равна $6/12 = 1/2$.

Теперь понятно, что указанные ответ и решение неверны. В приведенном решении первые два предложения верны, а третье – неверно, т.е. ошибка начинается с фразы: «Но кроме *Б* у нас есть 3 человека – *А*, *В* и *Г*, и каждый из них может быть первым с равной вероятностью». Действительно, речь идет только о случаях, когда *А* стоит раньше *Б*, что повышает вероятность того, что *А* стоит первым.

Приведем также еще одно возможное решение. Рассмотрим все расстановки пары *А* и *Б*, при которых *Б* стоит позже *А*. Среди них есть три расстановки, в которых *А* стоит первым (*Б* может быть вторым, третьим или четвертым). Расстановок, где *А* не первый, тоже три (если *А* второй, то *Б* третий или четвертый, а если *А* третий, то *Б* – только четвертый). Количество расстановок *В* и *Г* на оставшихся местах не зависит от того, о каких именно местах идет речь, поэтому искомая вероятность равна $3 : (3 + 3) = 1/2$.

12. Неверны и ответ, и решение. Ошибка приведенного рассуждения заключается в том, что произошла подмена понятий: в одном месте идет речь о безусловной вероятности, а в другом – об условной. По отдельности все строки решения имеют смысл, но в разных ситуациях.

1) Утверждение «Первый артиллерист промахивается с вероятностью 0,8, а второй – с вероятностью 0,4. Поэтому вероятность промаха первого в два раза выше, чем вероятность промаха второго» верно, если речь идет о безусловной вероятности, причем при однократном выстреле по цели. При двойном выстреле это утверждение неверно (более подробно – см. ниже).

2) Утверждение «Поскольку в цель попал только один снаряд, то сумма вероятностей промахов первого и второго равна 1» – также верное, но для других вероятностей. Оно имеет смысл, если речь идет об условных вероятностях промахов стрелков при условии, что из двух выстрелов в цель попал лишь один снаряд. Но ниоткуда не следует, что отношение условных вероятностей равно отношению безусловных вероятностей!

Приведем верное решение. Так как результаты выстрелов первого и второго – независимые события, то вероятность того, что первый попал, а второй промахнулся, равна $0,2 \cdot 0,4 = 0,08$; вероятность того, что второй попал, а первый промахнулся, равна $0,8 \cdot 0,6 = 0,48$. Нас интересует условная вероятность промаха первого при условии, что из двух выстрелов в цель попал лишь один из них (иными словами: требуется найти, какую долю составляют те случаи, в которых промахнулся первый, среди всех случаев, когда в цель попал только один из артиллеристов), т.е.

$$\frac{0,48}{0,08 + 0,48} = \frac{0,48}{0,56} = \frac{6}{7}.$$

Это же рассуждение можно выразить и более формально: пусть событие *A* – {при двойном выстреле первый промахнулся}, событие *B* – {при двойном выстреле попал лишь один снаряд}. Тогда требуется вычислить $P(A/B)$. Используя формулу условной вероятности, получим

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0,48}{0,08 + 0,48} = \frac{6}{7}$$

(событие *AB* – {первый промахнулся, а второй попал}).

Отметим, что возможны также решения, использующие формулу Байеса.

Разберем теперь подробнее, почему в условиях нашей задачи (выстрелили две пушки) утверждение, разобранное в пункте 1), неверно. Действительно, при двойном выстреле возможны следующие четыре несовместных исхода:

A_1 – {оба попали в цель};
A_2 – {первый попал, второй промахнулся};
A_3 – {первый промахнулся, второй попал};
A_4 – {оба промахнулись}.

Вероятность того, что первый промахнулся, равна $P(A_3) + P(A_4)$ и, по условию, составляет 0,8. Вероятность того, что второй промахнулся, равна $P(A_2) + P(A_4)$ и, по условию, составляет 0,6. В приведенном «решении» из того, что $\frac{P(A_3) + P(A_4)}{P(A_2) + P(A_4)} = 2$, делается неверный вывод о том, что $\frac{P(A_3)}{P(A_2)} = 2$.

Следовательно, можно также решить задачу, вычислив $P(A_4) = 0,8 \cdot 04 = 0,32$. Тогда $P(A_3) = 0,8 - 0,32 = 0,48$, а $P(A_2) = 0,4 - 0,32 = 0,08$.

Таким образом, $\dfrac{P(A_3)}{P(A_2)} = 6$, значит, доля тех случаев, в которых промахнулся первый, среди всех случаев, когда в цель попал лишь один, равна $\dfrac{6}{7}$.

XXXIX ТУРНИР ГОРОДОВ

(см. «Квант» №5)

ЗАДАЧИ ВЕСЕННЕГО ТУРА

Базовый вариант

8–9 классы

1. Могли.
Клетка будет красной, если бьющие ее ладьи стоят на одной диагонали, и синей – в противном случае.
а) Расставим ладей на главной диагонали.
б) Ладьи должны быть не бьющими друг друга ферзями (рис. 9).

		Л			
					Л
	Л				
				Л	
Л					
			Л		

Рис. 9

Замечание. Примеры единственны с точностью до симметрий.
2. Решение 1. Поскольку в прямоугольном треугольнике CLB медиана, проведенная из прямого угла, равна половине гипотенузы, достаточно доказать, что M – середина LB (рис.10).
Первый способ. Отметим на отрезке AK точку F так, что $AF = AL$. Тогда $FL \parallel KC$ и $FK = LC = KB$. Значит, KM – средняя линия треугольника LFB, и $LM = MB$.
Второй способ. Проведем через точку L прямую, параллельную AB, до пересечения с CK в точке G. Так как треугольник CAK равнобедренный, то и CLG – тоже. Поэтому $LG = LC = BK$ и $LGBK$ – параллелограмм. Следовательно, M – середина LB.

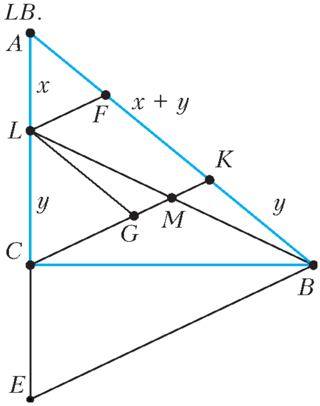


Рис. 10

Третий способ. Поместим в точки C, A и B массы $x = AL$, $y = LC$ и $x + y$ соответственно. Тогда L – центр масс точек A и C, а K – точек A и B. Поэтому общий центр масс лежит на пересечении отрезков BL и CK, т.е. в точке M. Группируя точки A и C, получим точку L с массой $x + y$. Поскольку у L и B равные массы, то M – середина LB.
Решение 2. Проведем через точку B прямую, параллельную CK, до пересечения с прямой AC в точке E (см. рис. 10). Так как треугольник ACK равнобедренный, то и AEB – тоже. Поэтому $EC = BK = LC$. Таким образом, BC – высота и медиана треугольника ELB, значит, он – равнобедренный. Подобный ему треугольник CLM – тоже равнобедренный.
3. а) Можно. Пусть в правом нижнем углу находится число x. Сумма чисел в двух средних столбцах равна сумме чисел в двух крайних строках. Поэтому $4 + 5 + 6 + 7 = 1 + 2 + 3 + x$, т.е. $x = 16$.
б) Нельзя. Рассмотрим любой подходящий набор из восьми неизвестных еще чисел. Добавим к каждому из них по 1. Суммы чисел в рядах увеличатся на 2, значит, останутся равными. Следовательно, ни одно из этих восьми чисел восстановить нельзя.
Замечание. Подходящие расстановки существуют. Больше нельзя восстановить ни одного числа даже в случае, когда сумма в рядах известна. Действительно, к любой таблице можно без изменения сумм в рядах добавить таблицу, представленную на рисунке 11.

0	1	–1	0
–1	0	0	1
1	0	0	–1
0	–1	1	0

Рис. 11

5. Не могло.
Как известно, n прямых разбивают плоскость максимум на $1 + \dfrac{n(n+1)}{2}$ областей. Значит, после проведения семи красных прямых образуется не более 29 областей. В какую-то из них попадут хотя бы две точки. Отрезок, их соединяющий, не пересечет ни одну прямую, поскольку области, очевидно, выпуклы.
Замечание. Условие, что три точки не лежат на одной прямой, – лишнее.

10–11 классы

1. Не может.
Пусть CL – биссектриса, CH – высота треугольника ABC, причем $\angle A < \angle B$. Тогда $BC < CA$.
Первый способ. По условию, точка H лежит на стороне AB, поэтому угол B – острый. Поскольку $\angle BCH = 90° - \angle B < 90° - \angle A = \angle ACH$, то точка H лежит на отрезке BL. По свойству биссектрисы треугольника, $BH + HL = BL < LA$, т.е.

для отрезков BH, HL и LA не выполнено неравенство треугольника.

Второй способ. Как известно, биссектриса лежит между медианой и высотой. Поэтому $AL > AB/2 > LH + HB$, что противоречит неравенству треугольника.

3. Решение 1. Обозначим через X точку пересечения отрезка AO_2 с первой окружностью (рис.12). Тогда $\angle AXC = 90°$. Достаточно доказать, что точки C, X и M лежат на одной прямой, т.е. что $\angle MXO_2 = 90°$.

Точки C, T и B лежат на одной прямой, поскольку $\angle CTA = \angle ATB = 90°$ ($MA = MT = MB$). Прямые AC и BO_2 параллельны, значит, $\angle TCA =$

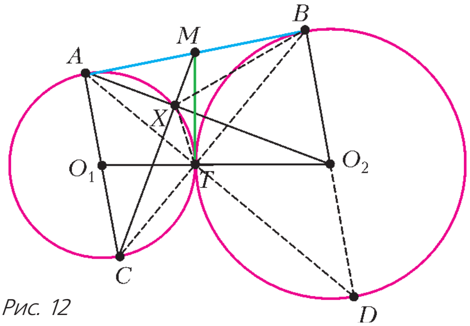


Рис. 12

$= \angle TBO_2$. Из вписанного четырехугольника $AXTC$ имеем $\angle TCA = \angle TXO_2$. Поэтому четырехугольник $TXBO_2$ – тоже вписанный (X и B лежат по одну сторону от TO_2). Так как точки B и T лежат на окружности с диаметром MO_2, то X тоже лежит на ней, и $\angle MXO_2 = 90°$, что и требовалось.

Решение 2. Заметим, что MO_1 и MO_2 – биссектрисы углов AMT и BMT. Поэтому прямоугольные треугольники AMO_1 и BO_2M подобны. Следовательно, существует поворотная гомотетия, переводящая AMO_1 в BO_2M. Поскольку O_1 – середина AC, а M – середина AB, то C перейдет в A. Поэтому отрезок CM переходит в AO_2, и угол между ними равен углу поворота, т.е. $90°$.

4. Вася.

Разобьем доску без стартовой клетки на трехклеточные уголки. Хорошо известно, что это возможно. Васина стратегия – делать оба хода внутри того уголка, куда пошел Петя. Тогда перед Петиным ходом каждый уголок либо полностью открыт, либо полностью закрыт. Таким образом, у Васи всегда есть оба хода, и он выиграет, так как игра конечна.

Замечание. Ничего не изменится, если поменять клетку старта.

5. Решение 1. Посмотрим на трехцветную вершину. Из нее выходит ровно одно красно-желтое (принадлежащее красной и желтой граням) ребро. Пойдем по нему. В другом его конце сходятся красная и желтая грани. Если третья грань синяя, то это трехцветная вершина, из которой не выходит других красно-желтых ребер. Иначе из этой вершины выходит еще ровно одно красно-желтое ребро. Пойдем по нему. Так, ходя по красно-желтым ребрам, мы упремся в итоге в трехцветную вершину, поскольку в пройденные вершины вернуться не можем. Таким образом, трехцветные вершины разбиваются на пары – концы красно-желтых путей.

Решение 2. Рассмотрим граф многогранника и удалим в нем все одноцветные ребра. Тогда степени трехцветных вершин станут равны трем, двуцветных – двум, одноцветных – нулю. По лемме о рукопожатиях, в графе четное число нечетных вершин, т.е. трехцветных.

Сложный вариант

8–9 классы

1. Плюс.

Рассмотрим любое число с нечетным номером. Остальные числа разбиваются на пары соседних. Значит, их сумма положительна, поэтому рассматриваемое число отрицательно. Числа с четными номерами должны быть положительными, чтобы суммы в парах с ними были положительными. Поэтому выписано 20 отрицательных чисел и 19 положительных, их произведение положительно.

Замечание. Такая строка чисел существует, например: -20, 21, -20, …, 21, -20.

2. Не мог.

Пусть у Аладдина было $1000 + x$ слитков. После просьбы их станет $1000 + \frac{x}{2}$, а после десяти просьб их будет $1000 + \frac{x}{2^{10}}$. Следовательно, x делится на 1024. Так как $x \geq -1000$, то $x \geq 0$. Поэтому количество слитков не увеличилось.

5. 197.

Пример. Пусть на правой стороне номера равны 2, 4, 6, …, 98, 100, а на левой они равны 1, 5, 9,… …, 193, 197. Разности равны 1, -1, -3, …, -97 и различны, наибольший номер дома равен 197.

Оценка. Подойдем к первому дому на какой-то стороне. Пойдем вдоль улицы, потом около некоторого дома перейдем к противоположному дому, потом продолжим идти вдоль улицы, потом опять у некоторого дома перейдем к противоположному и дойдем до конца. Пока мы шли вдоль улицы, номер каждого следующего дома был хотя бы на 2 больше предыдущего. Значит, разница номеров домов в начале и в конце улицы не меньше чем $2 \cdot 49$ плюс разности номеров в двух парах домов, у которых мы перешли улицу. Покажем, что можно выбрать начальную сторону улицы и две пары домов так, чтобы эти две разности в сумме давали не меньше 98. Тогда мы получим, что у последнего дома номер не меньше 1 + 98 + 98 = 197.

Действительно, все разности нечетны и различны, поэтому найдутся две, которые отличаются хотя бы на 98. Улицу нужно пересекать как раз у пар домов с этими разностями. Если меньшая из двух разность расположена ближе к началу улицы, чем большая, то нужно начинать обход с четной стороны. Тогда при переходе улицы она войдет в сумму с минусом, а большая – с плюсом. Если меньшая разность дальше от начала, то нужно начинать с нечетной стороны.

6. Два вопроса.

Пример. Первый вопрос зададим из произвольной точки. Если все ответы на него одинаковы, то все сидящие за столом – лжецы, поскольку рыцарь и лжец дают разные ответы. В противном случае найдутся соседи, ответившие по-разному. Встанем в середину дуги между ними. Так как хотя бы один из двоих – лжец, то до ближайшего лжеца расстояние известно. Тогда те, кто его назовет, – рыцари, а остальные – лжецы.

Оценка. Пусть был задан только один вопрос. Разобьем людей на группы находящихся на одинаковом расстоянии от путешественника. Будет больше одной группы, поскольку нельзя вставать в центр стола. Пусть ближайшая группа указала на следующую за ней, а остальные – на первую. Легко видеть, что первая группа могла оказаться рыцарями, а остальные – лжецами, но могло быть и наоборот.

10—11 классы

3. Всегда.

Покрасим все числа в красный цвет. На каждом ходу будем поворачивать некий красный прямоугольник, после чего перекрашивать одно число в зеленый цвет. Таким образом, зеленые числа больше не будут перемещаться. Будем поддерживать такие свойства: 1) каждое зеленое число меньше всех красных; 2) в каждой строке слева направо и в каждом столбце снизу вверх сначала идут зеленые числа по возрастанию, а потом – красные числа в произвольном порядке. После 99 таких ходов останется только одно красное число в правом верхнем углу, и требуемое в задаче будет достигнуто.

Изначально свойства выполнены. Пусть перед очередным ходом свойства выполняются и наименьшее из красных чисел – x – стоит в клетке A. Будем двигаться вниз от клетки A по красным числам, пока возможно, до клетки B. От клетки B – аналогично влево до клетки C. Возьмем прямоугольник $ABCD$ (возможно, вырожденный). Он будет красным. Повернем его. Число x окажется в клетке C. Числа слева и снизу от него, если есть, – зеленые и они меньше x. Перекрасим x. Все свойства, очевидно, выполнены.

4. Пусть плоскости α и γ пересекают плоскость β по прямым a и b и составляют с ней углы φ и ψ соответственно. Совместим α с β поворотом на угол φ вокруг a. Аналогично совместим γ с β. Тогда все происходит в плоскости β. Сначала происходит сжатие к прямой a с коэффициентом $\cos\varphi$, а потом – сжатие к прямой b с коэффициентом $\cos\psi$. Очевидно, что a и b не параллельны.

Сжатие – аффинное преобразование. Поскольку композиция этих преобразований – тоже аффинное преобразование, так как перевела исходный правильный треугольник в подобный, то она – подобие. У этого подобия есть неподвижная точка – точка O пересечения прямых a и b.

Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. б) Предположим, a и b не перпендикулярны. Пусть точки X и Y лежат на a и b соответственно и угол XOY острый. После первого сжатия X остается на месте, а Y переходит внутрь угла XOY. После второго – обе точки оказываются внутри угла XOY. Таким образом, угол уменьшился, это не подобие, противоречие.

а) Так как угол XOY прямой, то он переходит в себя при композиции данных сжатий. Значит, это гомотетия с положительным коэффициентом k. Будем считать векторы $\overrightarrow{OX}$ и $\overrightarrow{OY}$ базисными. Точка $(x;y)$ перейдет сначала в $(x;y\cos\varphi)$, затем – в $(x\cos\psi;y\cos\varphi)=(xk;yk)$. Значит, $\varphi=\psi$.

Второй способ (идея Zhi Kin Loke). Рассмотрим описанную окружность Ω исходного треугольника. Первая проекция переводит Ω в эллипс, большая ось которого параллельна прямой a. Длина этой оси равна диаметру d окружности Ω, а длина малой оси равна $d\cos\varphi$. Поскольку композиция двух наших проекций – подобие, эллипс при второй проекции перейдет в окружность ω. Все диаметры эллипса (хорды, проходящие через его центр) станут диаметрами окружности ω. Их длины уменьшатся, кроме хорды, параллельной прямой b. Поэтому малая ось параллельна ω и сохранит свою длину, а длина большой оси умножится на $\cos\psi$. Отсюда следует как перпендикулярность прямых a и b (параллельных осям эллипса), так и равенство $d\cos\varphi=d\cos\psi$, т.е. равенство углов φ и ψ.

6. Пусть лучи UC и VC пересекают в точках K и L касательную, проведенную из точки D, и вторично пересекают окружность в точках X и Y (рис.13). Пусть T – общая точка касательных, проведенных из A и B. Запишем теорему Мене-

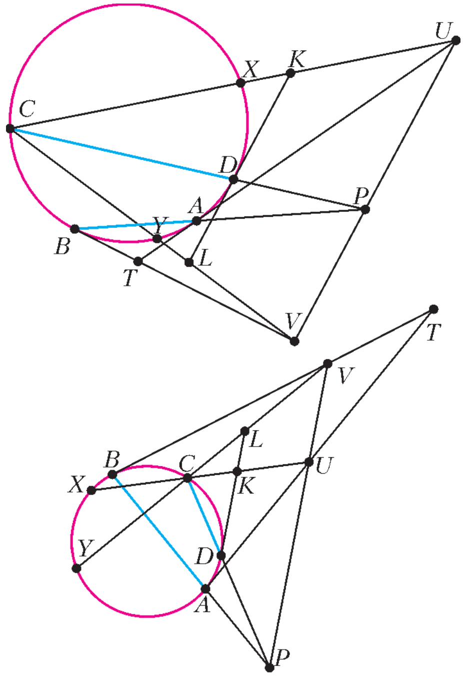


Рис. 13

лая для треугольника UVT и прямой BP:

$$\frac{UP}{PV}\cdot\frac{VB}{BT}\cdot\frac{TA}{QU}=1 .$$

Учитывая, что $BT = TA$ и $\frac{UP}{PV}=\frac{KD}{DL}$, получаем $\frac{KD\cdot VB}{DL\cdot AU}=1$ (если точка T не существует, то это равенство очевидно), т.е. $\frac{UA}{KD}=\frac{VB}{LD}$. По теореме о секущей и касательной,

$$\frac{UX\cdot UC}{KX\cdot KC}=\frac{UA^2}{KD^2}=\frac{VB^2}{LD^2}=\frac{VY\cdot VC}{LY\cdot LC} .$$

Поскольку $\frac{UC}{KC}=\frac{VC}{LC}$, то

$$\frac{UX}{KX}=\frac{VY}{LY} .$$

Следовательно, по обратной теореме Фалеса прямые XY и UV параллельны. Поэтому существует гомотетия с центром C, переводящая треугольник CXY в треугольник CUV. Значит, их описанные окружности касаются в точке C, что и требовалось.

7. $n - k - 1$.

Оценка. Очевидно, k безумцев могут не угадать. Первый говорящий из умных также может не угадать, поскольку у него нет никакой информации о цвете его шляпы. Поэтому больше $n - k - 1$ угадываний гарантировать нельзя.

Пример. Пусть все мудрецы единообразно кодируют раскраску видимых ими шляп. Мудрец, видящий i шляп, называет число от 1 до 2^i. Если он назовет другое число, то пусть все считают, что он назвал единицу. Тогда каждому мудрецу, кроме начинающего, сообщают цвет его шляпы все предыдущие ораторы. Вопрос только в том, кого из них слушаться, чтобы назвать свой цвет.

Назовем начинающего текущим *оракулом*. Стратегия умного мудреца – называть тот цвет, что указал ему последний оракул. Если говорящий слушается оракула, то он сам становится оракулом, иначе оракул не меняется. Так как все всё слышат, то каждый может проследить за тем, кто сейчас оракул.

Заметим, что каждый из умных будет оракулом. Каждого умного, кроме последнего говорящего из них, кто-нибудь послушается на отрезке до следующего умного включительно. Поэтому будет хотя бы $n - k - 1$ угадываний.

УСТНЫЙ ТУР ДЛЯ 11 КЛАССА

1. Нет, не может.

Часть, оставшуюся после очередного разрезания, назовем остатком. Длиной остатка назовем размер той его стороны, по которой он отрезан, а шириной — размер другой стороны. Длиной отрезаемого прямоугольника (куска) также будем считать размер стороны, по которой он отрезан, а шириной — размер другой стороны. Индукцией по номеру разрезания покажем, что ширина остатка всегда меньше его длины (что и решает задачу).

После первого разрезания это очевидно. Пусть после i-го разрезания длина остатка и отрезанного куска равна l_i, ширина остатка и отрезанного куска равна w_i и z_i соответственно; положим также l_0 и w_0 равными стороне исходного квадрата. Пусть при всех $1 \le j \le i$ было $l_j > w_j$. Имеем $l_i = w_{i-1} \le l_{i-1}$ (равенство выполнено лишь при $i = 1$). Площади i-го и $(i+1)$-го кусков одинаковы по условию, т.е. $l_i z_i = l_{i+1} z_{i+1} = w_i z_{i+1} < l_i z_{i+1}$, откуда $z_i < z_{i+1}$. С другой стороны, $z_i = l_{i-1} - w_i$, $z_{i+1} = l_i - w_{i+1}$. Окончательно получаем $w_{i+1} < w_i = l_{i+1}$, что и требовалось доказать.

2. Обозначим вторую точку пересечения PQ и окружности (ABC) через S. Тогда

$$\angle(BX,XC)=\angle(BX,XP)=\angle(BQ,QP)=$$
$$=\angle(BQ,QS)=\text{const}$$

(равенство в ориентированных углах). Получили, что угол (BQ,QS), опирающийся на дугу BS окружности (ABC), постоянный, а значит, и длина дуги BS постоянна, и тогда точка S не зависит от выбора окружности.

3. Восемь карточек.

Оценка. Занумеруем клетки, как показано на рисунке 14. Заметим, что одна из клеток с номером 1 должна быть открыта, иначе красный и синий способы заполнения таблицы на рисунке 15 были бы неразличимы. Одна из клеток с номером 2 также должна быть открыта, иначе красный и синий способы заполнения таблицы на рисунке 16 были бы неразличимы. Аналогично, должны быть открыты хотя бы по одной из клеток с номерами 3, 4, 5, 6, 7, 8, т.е. должно быть открыто не менее 8 карточек.

1	2	3	4
2	1	4	3
5	6	7	8
6	5	8	7

Рис. 14

Пример. Докажем, что, увидев числа во втором и третьем столбцах, мы сможем восстановить

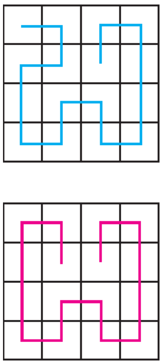


Рис. 15

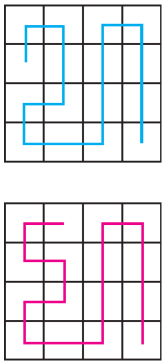


Рис. 16

числа в первом и четвертом столбцах. Заметим, что в черных клетках шахматной раскраски все числа одной четности, в белых — другой. Увидев второй и третий столбцы, мы понимаем, в какой клетке какая четность. Из открытых клеток выделим те, для которых у записанного в клетке числа не все соседние числа открыты. Из каждой такой клетки проведем ребро в единственную неперевернутую соседнюю клетку и однозначно восстановим в ней число. Заметим, что если в угол ведет ребро, то мы восстановим число в нем. Если же в угловую клетку не ведет ребро, то в ней стоит крайнее число, т.е. 1 или 16, а так как мы знаем четность числа в каждой клетке, то в этом случае мы тоже восстановим число в углу. Итак, числа в углах заведомо восстановлены.

Если среди угловых есть клетки, для которых не все соседние числа открыты, из каждого такого угла проведем ребро в неперевернутую соседнюю клетку и однозначно восстановим число в ней. Остались не восстановленными разве что числа в неугловых клетках первого и четвертого столбцов. Рассмотрим любую из них. В нее не ведет ребро ни из соседнего столбца, ни из угла, а тогда в этой клетке точно крайнее число (так как у нее осталась максимум одна клетка с соседним числом). По четности легко узнаем, какое крайнее число там должно стоять.

Таким образом, мы восстановили числа во всех клетках.

4. При A, запись которого (слева направо) такая: 501 девятка, восьмерка, 499 девяток.

Решение 1. Пусть $A = \overline{a_{1000}a_{999}\ldots a_0}$. Поскольку $A > Z$, среди цифр $a_0, a_1, \ldots, a_{499}$ есть хотя бы одна недевятка. Значит,

$$Z \le Z_0 = \underbrace{99\ldots9}_{499}8\underbrace{99\ldots9}_{501}.$$

Покажем, что

$$A - Z \ge 10^{501} - 10^{499}.$$

Отсюда будет следовать, что

$$\frac{A}{Z} - 1 \ge \frac{10^{501} - 10^{499}}{Z_0};$$

эта оценка достигается при $Z = Z_0$, что и дает ответ. Имеем

$$A - Z =$$

$$= (a_{1000} - a_0)(10^{1000} - 1) + (a_{999} - a_1)(10^{999} - 10) + \ldots$$

$$\ldots + (a_{501} - a_{499})(10^{501} - 10^{499}) =$$

$$= \varphi_{499}\Delta_{499} + \varphi_{498}\Delta_{498} + \ldots + \varphi_0\Delta_0,$$

где $\varphi_i = a_{501+i} - a_{499-i}$ и $\Delta_i = 10^{501+i} - 10^{499-i}$ при $i = 0, 1, \ldots, 499$. Заметим, что $\Delta_{i+1} > 10\Delta_i$. Пусть j — наибольший индекс, при котором $\varphi_j \ne 0$. Тогда

$$\left|\varphi_j\Delta_j + \varphi_{j-1}\Delta_{j-1} + \ldots + \varphi_0\Delta_0\right| \ge$$

$$\ge \left|\varphi_j\Delta_j\right| - \left|\varphi_{j-1}\Delta_{j-1}\right| - \ldots - \left|\varphi_0\Delta_0\right| \ge$$

$$\ge \Delta_j\left(1 - \frac{9}{10} - \frac{9}{100} - \ldots - \frac{9}{10^j}\right) = \frac{\Delta_j}{10^j} \ge \Delta_0,$$

что и требовалось.

Решение 2. Ясно, что можно минимизировать (положительное) число $\frac{A}{Z} - 1 = \frac{A - Z}{Z}$. Пронумеруем цифры в A слева направо: $a_1, a_2, \ldots, a_{1001}$. Пусть k — наименьший номер, для которого $a_k \ne a_{1002-k}$ (тогда $k \le 500$ и $a_k > a_{1002-k}$, ибо $A > Z$).

Рассмотрим произвольный оптимальный пример. Заменим первые и последние $k - 1$ цифр на девятки. Тогда $A - Z$ не изменится, Z не уменьшится, т.е. наша дробь не увеличится. По этой же причине a_{501} можно заменить на 9. Заменим

a_k на 9, а a_{1002-k} – на 8. При этом $A - Z$ не увеличится, а Z не уменьшится. Заменим все цифры $a_{k+1},\ldots,a_{500}$ на нули, а $a_{502},\ldots,a_{1000-k}$ – на девятки. Тогда $A - Z$ не увеличится, а Z если и уменьшится, то на меньшую величину (это произойдет только тогда, когда вторая половина и так была девятками!). Поскольку в оптимальном примере $A - Z < Z$ (в первом просто меньше цифр), то ясно, что $\frac{A-Z}{Z}$ не возрастет. Итак, можно считать, что A имеет вид

$$\underbrace{99\ldots9}_{k}\underbrace{00\ldots0}_{500-k}9\underbrace{99\ldots9}_{500-k}8\underbrace{99\ldots9}_{k-1}.$$

В этом случае

$$A - Z = 10^{501} + 10^{500} - 10^k - 10^{k-1}.$$

Это выражение достигает минимума при $k = 500$, и при этом же k достигается максимум значения рассматриваемых Z. Значит, это и есть ответ.

5. Да, можно.

Решение 1. Возьмем в горизонтальной плоскости α правильный треугольник с высотой 2. Пусть J — центр одной из его вневписанных окружностей, а A, B, C — середины его сторон. Выберем такие сферы: три радиуса 1 с центрами в A, B, C; две радиуса 2 с центрами в точках J' и J'', получающихся из J поднятием и опусканием относительно α на 1.

Теперь проведем требуемые плоскости. Плоскость через J', параллельная α, касается четырех остальных сфер; для J'' – аналогично. Осталось провести плоскость, скажем, через A; она перпендикулярна α и содержит сторону треугольника, на которой лежит A. Все проверки достаточно просты.

Решение 2. Центр сферы S_0 поместим в точке A_0 с координатами $(0;0;0)$, радиус r этой сферы выберем позже. Остальные сферы S_i, $i = 1,2,3,4$, возьмем радиуса 1, а центры этих сфер поместим в точки $A_1(a;0;1)$, $A_2(-a;0;1)$, $A_3(0;a;-1)$, $A_4(0;-a;-1)$ (a выберем позже).

Плоскость Oxy проходит через A_0 и касается сфер S_i, $i = 1,2,3,4$. Можно подобрать α так, чтобы плоскость $A_2A_3A_4$ находилась на расстоянии $\rho_1 = 1$ от точки A_1, тогда плоскость σ_1, проходящая через A_1 и параллельная плоскости $A_2A_3A_4$, будет касаться сфер S_i, $i = 2,3,4$. Действительно, уравнение плоскости $A_2A_3A_4$: $2x + az + a = 0$. Тогда $\rho_1 = \frac{4a}{\sqrt{4+a^2}}$ и достаточно положить $a = \sqrt{\frac{4}{15}}$. Положим r равным расстоянию от A_0 до плоскости σ_1 так, чтобы плоскость σ_1 касалась также и сферы S_0. Конструкция переводится в себя при симметрии относительно плоскостей Oxz, Oyz, а также при композиции поворота на 90° вокруг оси Oz и симметрии относительно плоскости Oxy. Поэтому условие задачи выполняется также для центров сфер S_i, $i = 2, 3, 4$.

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ НАШЕГО ЖУРНАЛА!

Посылая в редакцию журнала «Квант» статью, просим вас сообщать о себе, кроме фамилии, имени и отчества, также место работы, занимаемую должность и электронный адрес (e-mail).

КВАНТ 12+

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во ПИ №ФС77–54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел. моб.: 8 916 168-64-74
E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в типографии ООО «ТДДС-СТОЛИЦА-8»
Телефон: +7 495 363-48-86,
htpp: //capitalpress.ru

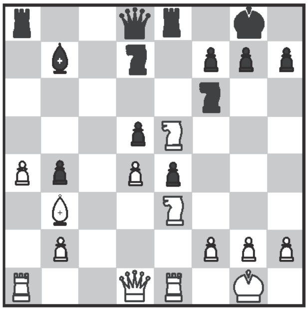
На путИ К ЧЕМПИОНАТУ МИРА

В то время как в России набирает обороты чемпионат мира по футболу, шахматный мир продолжает готовиться к своему главному событию – матчу на первенство мира, который традиционно проводится в конце года. Соискатели титула – Магнус Карлсен и Фабиано Каруана – встретились в супертурнире в норвежском городе Ставангере.

М.Карлсен–Ф.Каруана

Ставангер, 2018

1. e4 e5 2. ♗c4 ♞f6 3. d3 c6 4. ♘f3 d5 5. ♗b3 ♝b4+ 6. ♗d2 ♝d2+ 7. ♘bd2 a5 8.c3 ♞bd7 9. ed cd 10. 0-0 0-0 11. ♖e1 ♜e8 12. ♘f1 b5 13. a4 b4 14. cb ab 15. ♘e3 ♝b7 16. d4 e4 17. ♘e5



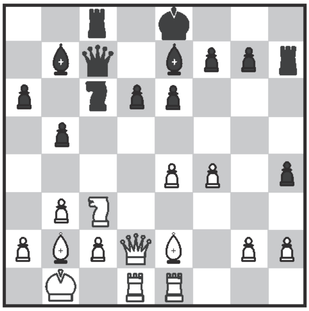
Ключевая позиция в партии. Белые предлагают позиционную жертву пешки, в ответ на которую черные могут пожертвовать качество: 17… ♜e5 18. de ♞e5 с инициативой. 17…♞e5 18. de ♜e5 19. ♕d4 ♜e7. Не решившись на жертву качества, черные вынуждены вести пассивную оборону, опасную с психологической точки зрения. 20. ♖ac1 ♜d7 21. ♖ed1 h6 22. ♖c5 ♜a5 23. ♖a5 ♛a5 24. h3 ♚h7 25. ♖c1 ♜c7?! Черные отдают пешку без видимых причин, можно было просто продолжать «стоять на месте», сохраняя лишний материал. 26. ♖c7 ♛c7 27. ♕b4 ♛c1+ 28. ♗d1 ♝a6 29. ♕d4!? Белые избегают заманчивого размена ферзей после 29. ♕c3 ♛c3 30. bc, так как не уверены в победном исходе пешечного эндшпиля. 29…♝e2 30. ♔h2 ♝d1 31. ♘d1 ♛c7+ 32. ♔g1 ♛c1 33. b4 e3?! Черные жертвуют пешку ради активизации коня, однако эта попытка атаки легко отбивается белыми. 34. fe ♞e4 35. ♕d5 ♞d2 36. ♕f5+ ♚h8 37. ♕g4! f5 38. ♕e2 ♞e4 39. ♕e1. Отбив наскок черного коня, белые остались с двумя лишними пешками и уверенно довели партию до победы.

Вот еще две яркие партии с участием соискателей.

М.Карлсен–Р.Войташек

Шамкир, 2018

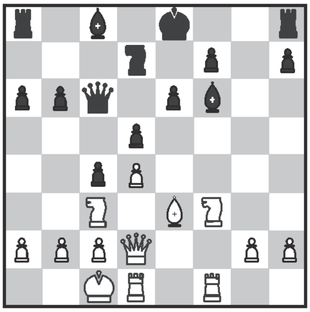
1. e4 c5 2. ♘c3 d6 3. d4 cd 4. ♕d4 ♞c6 5. ♕d2!? Редчайший случай столь ранней новинки в одном из самых актуальных дебютов – сицилианской защите. 5…♞f6 6. b3 e6 7. ♗b2 a6 8. 0-0-0. Длинная рокировка выглядит небезопасно, но это единственный способ добиться преимущества в экстравагантной расстановке, предложенной белыми. 8… b5 9. f3 h5 10. ♘h3 ♝e7 11. ♘g5 h4 12. f4. Позиция белых уже лучше, так как необычно расположенный слон на b2 приносит пользу и в атаке, и в защите. 12…♝b7 13. ♔b1 ♜c8 14. ♗e2 ♛c7 15. ♖he1 ♞h7 16. ♘h7 ♜h7.



17. g4. Белые просто усиливают позицию, проходя мимо типичного для таких позиций выпада 17. ♘d5!, с помощью которого выиграл несколько ярких партий М.Таль. 17… hg 18. hg ♝f6 19. ♗d3 ♜h8 20. g4?! Удивительный случай – дважды ход пешкой на одно и то же поле оказывается не сильнейшим продолжением! Лучше было 20. ♖h1. 20… ♞d4! 21. ♖e3 ♚f8 22. ♘e2 ♞e2 23. ♖e2 ♝c3. Черным не следует усложнять игру – размена на b2 с последующим ♛c5 достаточно для поддержания равновесия. 24. ♗c3 ♛c3?! Ошибка, позволяющая активизировать ферзя. 25. ♕e3! ♜c5 26. e5! dxe5 27. fe ♜h1?? Зевок, после которого черные теряют слона, хотя и лучшее 27…♜c7 вело к тяжелой позиции. 28. ♖h1 ♝h1 29. ♖h2 ♜e5 30. ♖h8+ ♚e7 31. ♕a7+. Выигрыш белых.

Ф.Каруана–В. Акобян

Сент-Луис, 2018



К такой позиции после 15 хода пришла партия, сыгранная в чемпионате США текущего года. Вместо защитного 15…♝e7 черные решаются на контратаку на ферзевом фланге, и Ф.Каруана наглядно показывает, чем опасна переоценка позиции в игре с соперником экстра-класса: 15…b5?! 16. ♕f2 b4 17. ♘e2 b3 18. ♘e5! ♝e5 19. ♕f7+ ♚d8 20.de ba 21. ♔d2 ♜f8 22. ♕h7 ♜f1 23. ♖f1 d4 24. ♕g8+ ♚c7 25. ♘d4 ♛d5 26. ♕e6 ♛a5+ 27. c3 ♞e5 28. ♖f7+! ♞f7 29. ♗f4+ ♚b7 30. ♕f7+. Белые выиграли.

А.Русанов

Индекс 90964

Прогулки с физикой

Выскользнув из рук, стеклянная банка консервов упала на пол, но не разбилась, а ...

ГИДРОУДАР

(Продолжение – на с. 37 внутри журнала)